第22卷第2期　　西昌学院学报·自然科学版　　Vol.22,NO.2
2008年6月　　Journal of Xichang College·Natural Science Edition　　Jun.,2008

用函数变换法求解二阶欧拉方程

晏　力,胡劲松
(西华大学 数学与计算机学院,四川 成都 610039)

【摘　要】通过"函数变换"将二阶欧拉方程降阶为可积的一阶线性微分方程,从而得到其积分形式的通解,还得到了一类非齐次欧拉方程特解的简单公式。该方法比用"自变量代换"法将欧拉方程转化为常系数线性微分方程进而求其解的过程更简单、更直接。

【关键词】函数变换法;欧拉方程;通解
【中图分类号】O241.8　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2008)02-0036-03

1 引言

欧拉方程是一类特殊的变系数线性微分方程,教材[1-3]上都是用"自变量代换"法将其转化为常系数线性微分方程来求解的,但过程比较烦琐。文[4]用"简化常数变易"对二阶非齐次欧拉方程

$$x^2y''+axy'+by=f(x) \tag{1}$$

(其中a,b为已知实常数,$f(x)$为已知实函数)给出了积分形式的解,结论也比较简洁。本文将用更加优越的"函数变换"法来对方程(1)进行降阶,然后给出和文[4]相类似的结论。而且,当$f(x)=0$时,此方法就是对二阶齐次欧拉方程

$$x^2y''+axy'+by=0 \tag{2}$$

求通解。同时,通过"函数变换"法还可以得到求欧拉方程

$$x^2y''+axy'+by=a_0x^p \tag{3}$$

(其中a_0和p为常数,且$a_0\neq0$)的特解的简单公式。另外,该方法也可以对高阶的欧拉方程进行降阶。

2 具体解法

作函数变换,引入新的未知函数$u=\dfrac{y}{x^\lambda}$(其中λ是常数),即令$y=x^\lambda u$,将其求一、二阶导数后代入方程(1),整理得

$$x^{\lambda+2}u''+(2\lambda+a)x^{\lambda+1}u'+[\lambda^2+(a-1)\lambda+b]x^\lambda u=f(x) \tag{4}$$

若$\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$,即常数λ是以r为未知数的代数方程

$$r^2+(a-1)r+b=0 \tag{5}$$

的根时,(4)式即可以化为:$u''+(2\lambda+a)x^{-1}u'=x^{-\lambda-2}f(x)$,这是以u为未知函数的可降阶的二阶线性微分方程,解之得:$u=\int[x^{-(2\lambda+a)}\int x^{\lambda+a-2}f(x)dx]dx$(其中u中含有两个相对独立的积分常数)。

定义[4,5] 以r为未知数的一元二次代数方程(5)称为二阶齐次欧拉方程(2)的特征方程。其特征方程(5)的根称为方程(2)的特征根。

由此得到:

定理1 设λ是方程(2)的特征根,则方程(1)的通解为:

$$y=x^\lambda\int[x^{-(2\lambda+a)}\int x^{\lambda+a-2}f(x)dx]dx \tag{6}$$

当λ是实数且(6)式中的积分为可积时,我们可以通过两次不定积分求出方程(1)的实函数通解。当λ是虚数时,为了得到方程(1)的实函数通解,和文[4]中的方法类似,我们用分部积分法和欧拉公式

$$x^{i\beta}=e^{i\beta\ln x}=\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)$$

将定理1的结论加以改进,于是有

定理2 设λ是方程(2)的特征根,则

(Ⅰ)当λ是方程(2)的特征单根时,方程(1)的通解为

$$y=\frac{1}{2\lambda+a-1}[x^\lambda\int x^{-\lambda-1}f(x)dx-x^{1-a-\lambda}\int x^{\lambda+a-2}f(x)dx];$$

特别地,当$\lambda=\alpha+i\beta$(或$\alpha-i\beta$)是方程(2)的特征虚数根时,方程(1)的通解为

收稿日期:2008-05-12

作者简介:晏　力(1979-　),女,四川人,助教,主要从事基础数学的教学及研究。

$$y=\frac{x^{\alpha}}{\beta}[\sin(\beta\ln x)\int x^{-\alpha-1}\cos(\beta\ln x)f(x)dx-\cos(\beta\ln x)\int x^{-\alpha-1}\sin(\beta\ln x)f(x)dx]$$

（其中$\alpha=\frac{1-a}{2}$，$\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4b-(a-1)^2}$）；

（Ⅱ）当λ是方程(2)的特征重根时，方程(1)的通解为

$$y=x^{\lambda}[\ln x\int x^{-\lambda-1}f(x)dx-\int\ln x\cdot x^{-\lambda-1}f(x)dx]$$

证明略（见文[4]）。

例1 求方程 $x^2y''-2xy'+2y=x^3\cos x$ 的通解。

解该欧拉方程所对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，其根为 $r_1=1$，$r_2=2$，所以由定理1，（取 $\lambda=1$，$\alpha=-2$）原方程的通解为

$$y=x\int[\int x^{-3}\cdot x^3\cos xdx]dx=x\int[\sin x+C_1]dx=C_1x^2+C_2x-x\cos x\text{。}$$

例2 求方程 $x^2y''-xy'+5y=\frac{2x}{\sin(\ln x)}$ 的通解。

解该欧拉方程所对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+5=0$，特征根为 $r_{1,2}=1\pm 2i=0$，所以由定理2，（$\alpha=1$，$\beta=2$）原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=\frac{x}{2}[\sin(2\ln x)\int\frac{x^{-2}\cos(2\ln x)\cdot 2x}{\sin(2\ln x)}dx-\cos(2\ln x)\int\frac{x^{-2}\sin(2\ln x)2x}{\sin(2\ln x)}dx]\\&=\frac{x}{2}[\sin(2\ln x)\int\frac{\cos(2\ln x)}{\sin(2\ln x)}\cdot(2\ln x)'dx-\cos(2\ln x)\int\frac{2}{x}dx]\\&=\frac{x}{2}\{\sin(2\ln x)[\ln|\sin(2\ln x)|+2C_1]-\cos(2\ln x)[2\ln x-2C_2]\}\\&=x[C_1\sin(2\ln x)+C_2\cos(2\ln x)]+\frac{x}{2}\sin(2\ln x)\cdot\ln|\sin(2\ln x)|-x\ln x\cdot\cos(2\ln x)\end{aligned}$$

3 推广

在定理2中，若令 $f(x)=0$，则得到二阶齐次欧拉方程（2）的通解：

推论设λ是方程(2)的特征根，则方程（2）的通解为：

$$\bar{y}=\begin{cases}C_1x^{\lambda}+C_2x^{1-a-\lambda} & (\lambda\text{是方程(2)的特征单实根})\\x^{\alpha}[C_1\cos(\beta\ln x)+C_2\sin(\beta\ln x)] & (\alpha+i\beta\text{是方程(2)的特征虚根})\\x^{\lambda}(C_1\ln x+C_2) & (\lambda\text{是方程(2)的特征重实根})\end{cases}$$

（其中 C_1，C_2 为任意常数）。

同样地，利用“函数变换”法，对方程(3)的特解，我们有如下结论：

定理3（Ⅰ）当p不是方程(2)的特征根时，方程(3)有特解：$y^*=\frac{a_0x^p}{p^2+(a-1)p+b}$；

（Ⅱ）当p是方程(2)的特征单根时，方程(3)有特解：$y^*=\frac{a_0x^p\ln x}{2p+a-1}$；

（Ⅲ）当p是方程(2)的特征重根时，方程(3)有特解：$y^*=\frac{1}{2}a_0x^p\ln^2x$。

证作函数变换，令 $y=x^pu$，将其求一、二阶导数后代入方程(3)，整理得

$$x^2u''+(2p+a)xu'+[p^2+(a-1)p+b]u=a_0\qquad(7)$$

（Ⅰ）当p不是方程(2)的特征根时，$p^2+(\alpha-1)p+b\neq 0$，则 $u=\frac{a_0}{p^2+(a-1)p+b}$（即常数函数）一定是方程(7)的解。所以 $y^*=\frac{a_0x^p}{p^2+(a-1)p+b}$ 是方程(3)的特解。

（Ⅱ）当p是方程(2)的特征单根时，$p^2+(\alpha-1)p+b=0$ 但 $2p+\alpha-1\neq 0$，即 $2p+\alpha\neq 1$。则方程(7)即为

$$x^2u''+(2p+a)xu'=a_0\qquad(8)$$

根据对数函数求导数的特点[5]，不妨设 $u^*=k\ln x$（其中κ为待定常数）是方程(8)的特解，代入方程(8)，得 $k=\frac{a_0}{2p+a-1}$，故 $y^*=x^pu^*=\frac{a_0x^p\ln x}{2p+a-1}$ 是方程(3)的特解。

（Ⅲ）当p是方程(2)的特征重根时，$p^2+(\alpha-1)p+b=0$ 且 $2p+\alpha-1=0$，则方程(7)为：$x^2u''+xu'=a_0$ 即 $(xu')'=a_0\frac{1}{x}$

经过两次不定积分且取积分常数为零，可得方程$x^2u''+xu'=a_0$的特解$u^*=\frac{1}{2}a_0\ln^2 x$，故$y^*=\frac{1}{2}a_0x^p\ln^2 x$是方程（3）的特解。

例3 求方程 $x^2y''-3xy'+4y=4x^2$ 的通解。

解该欧拉方程所对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4r+4=0$，即 $\lambda=2$ 是其二重根，所以由推论，方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解为：$\bar{y}=C_1x^2+C_2x^2\ln x$；

又由定理3，（p=2）原方程的特解为：$y^*=2x^2\ln^2 x$。所以，原方程的通解为：

$y=\bar{y}+y^*=C_1x^2+C_2x^2\ln x+x^2\ln^2 x$。

4 结束语

和文[4]的结论一样，本文的解法不受方程（1）中的$f(x)$的形式所限制，所以更具一般性。但根据前面的讨论，我们不难知道：如果利用函数变换 $y=x^\lambda u$，只要选取适当的常数 λ，就总可以将更高阶的欧拉方程降为较低阶的方程，进而使其求解过程更加简单。这也正是本文方法的优越性所在。现举例说明：

例4 选择适当函数变换对三阶欧拉方程 $x^3y'''-2x^2y''+3xy'-3y=2x^3$ 进行降阶。

解该方程对应的齐次方程的特征方程[5] $r(r-1)(r-2)-2r(r-1)+3r-3=0$，即 $r^3-5r^2+7r-3=0$，的根为：$r_1=r_2=1$、$r_3=3$，于是，令函数变换 $y=xu$，将其求一、二、三阶导数后代入原方程，整理得：$2x^4u'''+x^3u''-x^2u'=2x^3$，若令 $u'=w$，则原方程降为二阶欧拉方程："$2x^2w''+xw'-w=2x$"。

在例4中，我们也可以用函数变 $y=x^3u$　　来对该方程进行降阶。

注释及参考文献：

[1]罗亚平，陈仲编.微分方程[M].南京：南京大学出版社，1987，7.

[2]复旦大学数学系主编.常微分方程[M].上海：上海科学技术出版社，1987，7.

[3]同济大学应用数学系主编.高等数学(下册)(第五版) [M].北京：高等教育出版社，2002，7.

[4]胡劲松，郑克龙.简化常数变易法求解二阶欧拉方程 [J].大学数学，2005(2)：116−119.

[5]胡劲松.齐次欧拉方程的另一种求解方法[J].重庆工学院学报.2004(1)：47−56.

Solving Euler Equation of 2-Order by the Method of Function Transformation

YAN Li，HU Jin−song

(School of Mathematics and Computer Engineering of Xihua University，Chengdu，Sichuan 610039)

Abstract: By the methods of function transformation, non−homogeneous linear differential equations of constant coefficient of 2−order are reduced into integrable linear differential equations of 1−order. It obtains special solution of a kind of special differential equations. This method is more simple and direct than variable replacement method to make Euler equation transform linear differential equation of constant coefficient.

Key words: Method of function transformation；Euler equation；Special solution