

# 场频率变化对保真度的影响

包秀丽<sup>1</sup>, 林琳<sup>2</sup>

(1.重庆涪陵长江师范学院 公共基础实验教学中心, 重庆 涪陵 408000;

2.内蒙古工业大学 理学院物理系, 内蒙古 呼和浩特 010058)

**【摘要】**利用数值计算、数学推导,对比研究等方法,研究了场频率作正弦微小变化时原子与光场相互作用系统中保真度的演化。研究表明:场频率变化的幅值越大,即失谐量越大,则系统、光场和原子的保真度就越大;另外,场频率变化的角频率只影响系统、光场和原子的保真度演化曲线变化频率,当场频率变化的角频率增大一倍,则演化曲线的频率也增大一倍。

**【关键词】**频率变化场; 保真度; 光场与原子相互作用

**【中图分类号】**0431.2 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2008)01-0055-04

## 1 概述

在量子信息科学中,量子信息的载体是量子态,量子态在演化过程中实现量子信息的处理和传递,和所有信息科学一样,研究信息的保真度十分必要。保真度是表示信息在传输过程中保持原来状态的程度。保真度的概念广泛应用于量子通信和量子计算理论研究中,如纯态编码中的保真度<sup>[1-3]</sup>、量子系统的初态和终态是混合态的情况下保真度的性质<sup>[4]</sup>、量子信息和量子隐形传态理论中的保真度<sup>[5-7]</sup>等,得到了许多有意义的结果。如设初态为纯态,对应的密度算符为  $\rho(0)$ ,  $t$ 时刻态(可以是混合态)的密度算符为  $\rho(t)$ 。根据文献<sup>[4]</sup>,保真度可定义为:

$$F = \text{Tr}\{\rho(0)\rho(t)\} \tag{1.1}$$

在光场与原子的相互作用系统中,即使初始态为纯态,  $t(t > 0)$ 时刻子体系(原子,光场的态不一定是纯态<sup>[8]</sup>),但依然可以用(4.1.1)式来讨论这个系统中的量子信息保真度。

## 2 理论模型及求解

二能级原子通过多光子跃迁与单光子辐射场相互作用系统的哈密顿量,在旋波近似下,原子与光场相互作用的哈密顿量可表示为:

$$H = \frac{1}{2}\omega\sigma_z + \nu(t)a^\dagger a + g(t)(a^{+k}\sigma_- + a^k\sigma_+) \tag{2.1}$$

式中  $\hbar=1$ ,  $\omega_0$ 是二能级原子的跃迁频率,  $\omega$ 是辐射场的频率,设  $\omega = \omega_{01} + f(t)$ ,  $k\omega_{01} = \omega_0$ ,  $\omega_{01}$ 是共振情况下场的频率,  $k$ 是跃迁过程中吸收和发射的光子数,  $g$ 是原子与辐射场的耦合系数,  $f(t)$ 为频率随时间变化的函数,设  $g(t) = g_0(1 + f(t)/\omega)$ ,  $g_0$ 为共振情况的耦合系数。  $\sigma_z, \sigma_-, \sigma_+$ 为原子的赝自旋算符。把系统的哈密顿量分解为:  $H = H_0 + H_1$  (2.2a)  $H_0 = \omega(a^\dagger a + k\sigma_z)$  (2.2b)

$$H_1 = (\omega_0 - k\omega)\sigma_z + g(t)(a^{+k}\sigma_- + a^k\sigma_+) \tag{2.2c}$$

通过运算可得出:  $[H_0, H_1] = 0$

系统的时间演化算符可分解为:

$$U(t) = \exp(-iHt) = \exp(-iH_0t)\exp(-iH_1t) \\ = \begin{bmatrix} \exp[-i\omega(a^{+k}a^k + k/2)](\cos At - i\frac{\Delta \sin At}{2A}) & -ig \exp[-i\omega(a^{+k}a^k + k/2)]a \frac{\sin Bt}{B} \\ -ig \exp[-i\omega(a^{+k}a^k - k/2)]a^\dagger \frac{\sin At}{A} & -ig \exp[-i\omega(a^{+k}a^k - k/2)](\cos Bt + i\frac{\Delta \sin Bt}{2B}) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

式中:

$$\Delta = \omega_0 - k\omega = -kf(t) \quad A = [(\frac{\Delta}{2})^2 + g^2 a^{+k} a^k]^{1/2} \quad B = [(\frac{\Delta}{2})^2 + g^2 a^{+k} a^k]^{1/2}$$

设初始时刻( $t=0$ ),原子处于基态和激发态的相干叠加态,则为:

$$|\phi(0)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |e\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |g\rangle, \quad |\alpha\rangle \tag{2.4}$$

收稿日期:2007-09-28

作者简介:包秀丽(1977- ),女,理论物理硕士,主要从事量子信息理论的研究。

那么系统任意时刻t的状态可由时间演化算符U(t)求出:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= U(t)|\phi(0)\rangle \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \cos\frac{\theta}{2} \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp[-i(n+\frac{k}{2})\omega t] (\cos\Omega^+ t - i\frac{\Delta \sin\Omega^+ t}{\Omega^+}) |e, n\rangle \\
&\quad - i \sum_{m=0}^{\infty} g \sin\frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \frac{\alpha^{n-k}}{\sqrt{(n+k)!}} \exp[-i(n+\frac{3k}{2})\omega t] \frac{\sqrt{(n+k)!} \sin\Omega^+ t}{n! \Omega^+} |e, n\rangle \\
&\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp[-i(n-\frac{k}{2})\omega t + \varphi] \sin\frac{\theta}{2} (\cos\Omega^- t + i\frac{\Delta \sin\Omega^- t}{\Omega^-}) |g, n\rangle \\
&\quad - i \sum_{m=0}^{\infty} g \cos\frac{\theta}{2} \exp[-i(n-\frac{k}{2})\omega t] \frac{\sqrt{(n+k)!} \sin\Omega^+ t}{n! \Omega^+} \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |g, n+k\rangle
\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中:  $\Omega^+ = [(\frac{\Delta}{2})^2 + g^2 \frac{(n+k)!}{n!}]^{1/2}$   
 $\Omega^- = [(\frac{\Delta}{2})^2 + g^2 \frac{n!}{(n-k)!}]^{1/2}$

令:

$$A_n = \cos\frac{\theta}{2} \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp[-i(n+\frac{k}{2})\omega t] (\cos\Omega^+ t - i\frac{\Delta \sin\Omega^+ t}{\Omega^+}) \tag{2.6}$$

$$B_n = -ig \cos\frac{\theta}{2} \exp[-i(n-\frac{k}{2})\omega t] \frac{\sqrt{(n+k)!} \sin\Omega^+ t}{\sqrt{n!} \Omega^+} \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \tag{2.7}$$

### 3 量子信息保真度的计算

为了描述输入(初态)和输出(末态)的偏差程度,引入了保真度的概念,其定义为

$$F(\rho_1, \rho_2) = Tr[(\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1})^{1/2}]^2 \tag{3.1}$$

式中  $\rho_1$  和  $\rho_2$  为2种态所对应的态密度算符  $F(\rho_1, \rho_2)$  取值范围为0~1, 当  $F(\rho_1, \rho_2) = 0$  时, 表示信息(量子态)在传输过程中完全失真, 即表示初态和末态相互正交; 而当  $F(\rho_1, \rho_2) = 1$  时, 表示为理想信息传输过程, 即表明初态和末态相同, 一般情况下,  $0 < F(\rho_1, \rho_2) < 1$ , 表示信息在传输过程中存在失真现象。

在任意时刻系统的态密度算符为

$$\rho_s(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \tag{3.2}$$

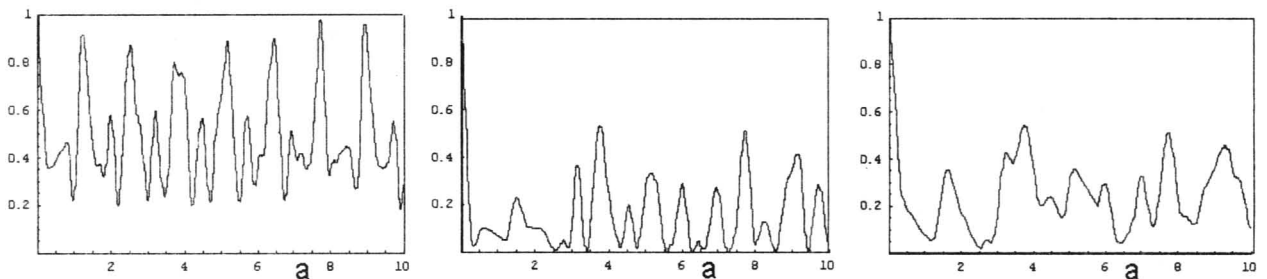
相应地, 子系统光场和原子的约化密度算符分别为:

$$\rho_f(t) = Tr_a \rho_s(t), \rho_a(t) = Tr_f \rho_s(t) \tag{3.3}$$

设原子初始态为激发态, 根据上述保真度的定义以及上述初始条件, 得到系统、原子、光场的量子态保真度。

$$\begin{aligned}
F_s(t) &= |\sum_{n=0}^{\infty} f_n A_n|^2 \\
F_f(t) &= |\sum_{n=0}^{\infty} f_n A_n|^2 + |\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} B_n|^2 \\
F_a(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

将(2.6)、(2.7)代入到(3.4), 即得到不同参数条件下的系统、光场、原子的保真度随时间演化规律。



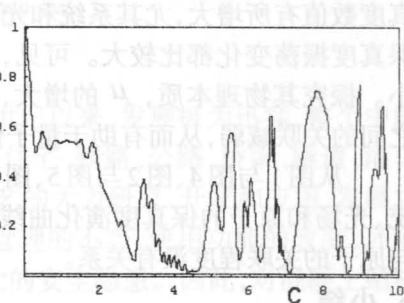
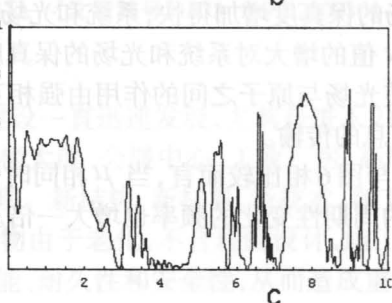
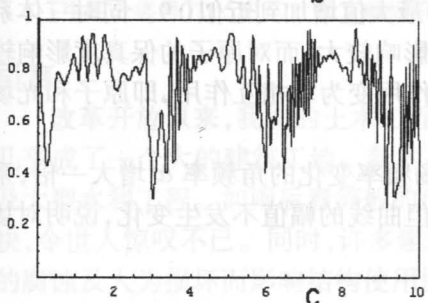
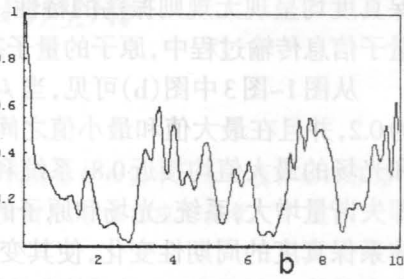
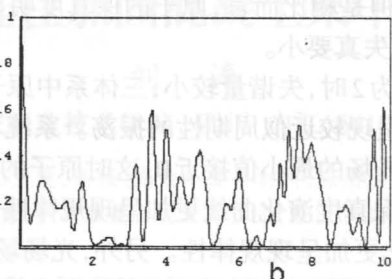
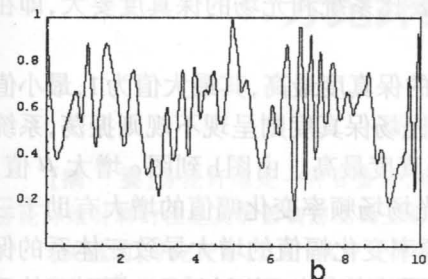


图1

图2

图3

图1为原子的保真度  $F_a(t)$  演化曲线; 图2为系统的保真度  $F_s(t)$  演化曲线; 图3为光场的保真度  $F_f(t)$  演化曲线。

a为  $\mu=0, \omega=1.0g_0$ ; b为  $\mu=2, \omega=1.0g_0$ ; c为  $\mu=5, \omega=1.0g_0$ ; d为  $\mu=8, \omega=1.0g_0$ ;

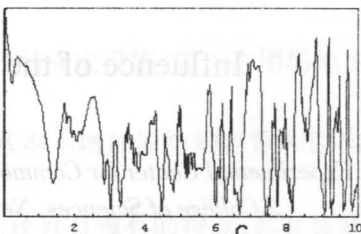
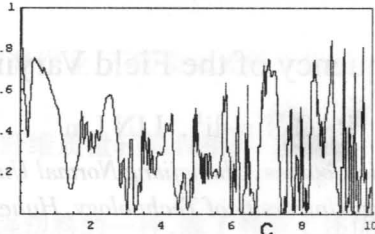
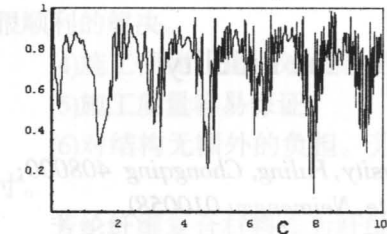
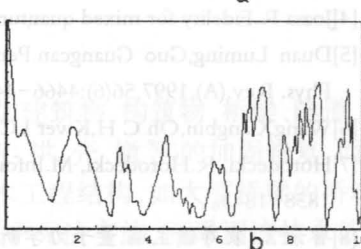
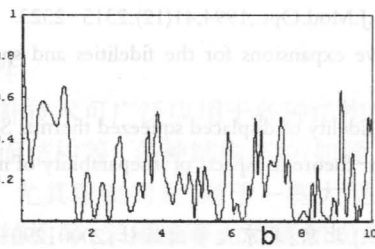
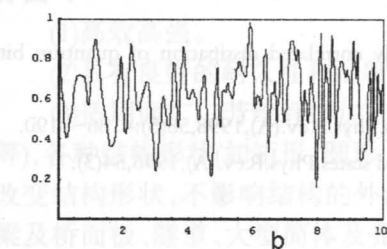
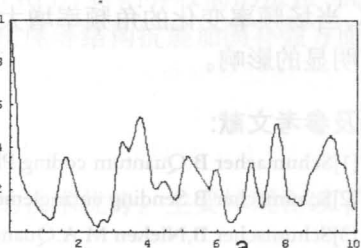
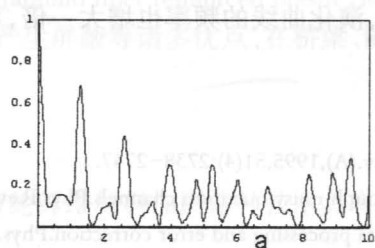
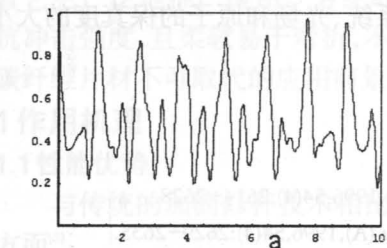


图4

图5

图6

图4为原子的保真度  $F_a(t)$  演化曲线; 图5为系统的保真度  $F_s(t)$  演化曲线; 图6为光场的保真度  $F_f(t)$  演化曲线。

a为  $\mu=0, \omega=2.0g_0$ ; b为  $\mu=2, \omega=2.0g_0$ ; c为  $\mu=5, \omega=2.0g_0$ ; d为  $\mu=8, \omega=2.0g_0$ ;

#### 4 结果分析

从图1~图6中可见, 当  $t=0$  时, 系统、光场与原子的量子态保真度均为1, 即三体系处于完全不失真状态。由图1~图3中(a)图可以看出, 场频率变化的幅值为0, 即场频率不发生改变, 系统、光场与原子的量子态

保真度均呈现无规则振荡的特性。但是相比而言,原子的保真度明显要比系统和光场的保真度要大,即在量子信息传输过程中,原子的量子态失真要小。

从图1~图3中图(b)可见,当 $\mu$ 为2时,失谐量较小,三体系中原子的保真度最高,其最大值为1,最小值为0.2,并且在最大值和最小值之间呈现较近似周期性的振荡。系统和光场保真度则呈现不规则振荡,系统和光场的最大值均接近0.8,系统和光场的最小值接近0,这时原子的保真度最高。由图b到图c,增大 $\mu$ 值,即失谐量增大,系统、光场和原子的保真度演化曲线更加呈现规律性,光场场频率变化幅值的增大有助于三体系保真度的周期性变化,使其变化更加呈现规律性。另外,光场场频率变化幅值的增大导致三体系的保真度数值有所增大,尤其系统和光场的保真度增加得快,系统和光场的最大值增加到近似0.9。同时三体系保真度振荡变化都比较大。可见, $\mu$ 值的增大对系统和光场的保真度影响较大,而对原子的保真度影响较小。探究其物理本质, $\mu$ 的增大,使光场与原子之间的作用由强相互作用变为弱相互作用,即原子和光场之间的关联减弱,从而有助于量子信息的传输。

从图1与图4、图2与图5、图3与图6相比较而言,当 $\mu$ 相同时,场频率变化的角频率 $\omega$ 增大一倍,系统、光场和原子的保真度演化曲线的周期性变化的频率也增大一倍。但曲线的幅值不发生变化,说明对场与原子的关联程度没有关系。

## 5 小结

通过对二能级原子多光子跃迁与单光子辐射场系统相互作用时的体系的量子态保真度的讨论,发现光场场频率变化的幅值对保真度有明显的影响。结果表明,场频率变化的幅值越大,即失谐量越大,系统、光场和原子的保真度就越大。此外,原子的保真度要明显高于系统和光场的保真度,即在量子信息传播过程中,原子态的保真性能较好。另外,场频率变化的角频率只影响系统、光场和原子的保真度演化曲线变化的频率,当场频率变化的角频率增大一倍,演化曲线的频率也增大一倍,对系统、光场和原子的保真度的大小没有明显的影响。

### 注释及参考文献:

- [1]Schumacher B.Quantum coding.Phys.Rev.(A),1995,51(4):2738-2747.
- [2]Schumacher B.Sending entanglement through noisy quantum channels.Phys.Rev.(A),1996,54(4):2614-2628.
- [3]Schumacher B,Nielsen M A.Quantum data processing and error correction.Phys.Rev.(A),1996,54(4):2629-2635.
- [4]Jozsa R.Fidelity for mixed quantum states.J.Mod.Opt.,1994,41(12):2315-2323.
- [5]Duan Luming,Guo Guangcan.Perturbative expansions for the fidelities and spatially correlated dissipation of quantum bits. Phys. Rev.(A),1997,56(6):4466-4470.
- [6]WangXiangbin,Oh C H,Kwer LC.Bures fidelity of displaced squeezed thermal States.Phys.Rev.(A),1998,58(5):4186-4190.
- [7]Horodecki, R.Horodecki, M.Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states.Phys.Rev.(A),1996,54(3):1838-1843.
- [8]曾谨言,裴寿镛主编.量子力学新进展[M].北京:北京大学出版社,2000:290-291.

## Influence of the Frequency of the Field Varying on the Fidelity

BAO Xiu-li<sup>1</sup>, LIN Lin<sup>2</sup>

(1.Experimetal Center for Common Basic Courses, Changjiang Normal University, Fuling, Chongqing 408000;  
2.College of Sciences, NeimengguUniversity of Technology, Huhehaote, Neimenggu 010058)

**Abstract:**The fidelity of quantum information for the multi-photon Jaynes-Cummings model with the frequency of the field varying with time in the sinusoidal form have been studied, taking advantage of computation, data processing, demonstration and comparison etc.The results show that the frequency parameters have obviously effects on the fidelity, with the increasing of the frequency parameters, with the detuning parameters increase, the fidelity of system, photon of field and atom also increase. And the frequency parameters of the field varying with time only effect the frequency of the curve, with the increasing of the frequency parameters, the frequency of the fidelity curve also increase.

**Key words:**Frequency of field varying with time;Fidelity;Interaction between atom and field