用物理学热传导理论剖析二阶齐次线性偏微分方程的本质

董丽华
(辽东学院 师范学院, 辽宁 丹东 118001)

【摘　要】本文利用物理学中常见的热传导理论,形象地阐释了二阶齐次线性偏微分方程的本质。

【关键词】二阶齐次线性偏微分方程;热传导理论
【中图分类号】O175　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2008)01-0053-02

微分方程的产生是与物理学、天文学、金融学等应用学科的发展相辅相成的。现实世界中绝大多数事物的内在联系是极其复杂的,其状态随着时间、地点、条件的不同而不同,我们只能通过对问题进行简化和某些假定,从中找出其状态和状态的变化规律之间的关系,也就是一个或一些函数与它们的导数之间的关系,这种关系的数学表达式就是微分方程。其中偏微分方程指含有未知函数及其偏导数的方程,描述自变量、未知函数及其偏导数之间的关系。在解决实际问题中,我们更多地应用二阶线性偏微分方程。

二阶线性偏微分方程是指具有如下形式的方程:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial xy}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial x}+fu=g(x,y)$$

其中a,b,c,d,e为常数,f为x和y的函数。

1 利用物理学中的“热传导现象”,揭示二阶齐次线性偏微分方程所蕴涵的热传导过程的一般规律

当物体内部各处的温度不一致时,热量就会从高温处向低温处传递,这被称为“热传导现象”。现在假定存在一导热物体,它在空间中占据的区域为G,边界面为∂G,用温度函数$u(x,y,z,t)$表示物体在t时刻和(x,y,z)位置的温度,来建立温度函数需要满足的关系式。

设想从物体G内任意割取一个由光滑曲面L所围成的区域D(见图1)。

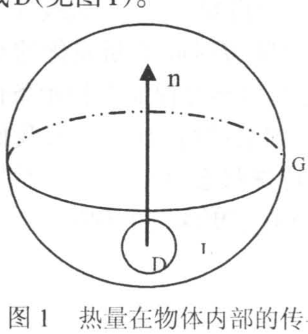

图1　热量在物体内部的传导

根据热量守恒定律,D内各点的温度由任一时刻t_1的$u(x,y,z,t_1)$改变为t_2时刻的$u(x,y,z,t_2)$所吸收(或释放)的热量Q_1,应等于从t_1到t_2时间内通过L进入(或流出)D内的热量Q_1和D内热源提供的热量Q_2的总和。

下面来决定D内温度改变所需的热量Q。

首先,假定物体的比热为$c(x,y,z)$,密度为$\rho(x,y,z)$。则无穷小体积$d_v=d_X d_Y d_Z$的温度由$u(x,y,z,t_1)$升高到$u(x,y,z,t_2)$所需要的热量dQ为:

$$dQ=c\rho[u(x,y,z,t_1)-u(x,y,z,t_2)]dv$$

整个D由于温度改变需要的热量是:

$$Q=\iiint_D c\rho[u(x,y,z,t_1)-u(x,y,z,t_2)]dV$$

根据牛顿-莱布尼兹公式

$$u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

于是$Q=\iiint_D c\rho\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dtdv=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv\right]dt$

进而求出通过L进入D的热量Q。通过傅里叶热传导定律,可以知道:在无穷小时间间隔dt内通过一个法矢量为n的无穷小曲面dS,流向n所指那一侧的热量为:

$$dQ=-k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dsdt$$

其中k(x,y,z)是该物体在点(x,y,z)处的热传导系数。它恒为正,数值大小取决于组成物体的材料的性质;n是曲面的外法线,$\frac{\partial u}{\partial n}$是温度函数在(x,y,z)处沿外法线n的方向导数。其中n所指的那一侧为dS的正侧,因此,该式表示了在dt时间内从dS的负侧流向正侧的热量。因为热量总是从温度高的一侧流向温度低的一侧,所以用负号表示热流的方向与温度梯度的方向相反。

考虑光滑封闭曲面L,设在其上确定了一条连续变动的单位外法线n,则在两个时刻t_1和t_2内,经由该物体内任意封闭曲面L进入D的热量为:

$$Q_1=-\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_L k\frac{\partial u}{\partial t}ds\right]dt$$

应用奥斯托洛夫斯基-高斯公式,有

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dv\right\}dt=0$$

收稿日期:2007-12-01
作者简介:董丽华(1971－　),女,满族,辽宁丹东人,硕士,讲师,主要从事数学教学及研究工作。

最后求热源提供的热量Q。

物体内部可能存在热源，如果令物体内部的热源密度为

$F(x,y,z,t)>0$,则在时间(t_1,t_2)内物体热源所产生的热量为：

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_{L}F(x,y,z,t)dv\right]dt$$

根据热量守恒定律有：

$$Q=Q_1+Q_2$$

于是有：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{V}\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)-F(x,y,z,t)\right]dv\right\}dt=0$$

由于时间间隔(t_1,t_2)以及区域D是任取的，因此在任意时刻，该物体内任意点，上式中的三重积分恒等于0。所以在我们所考察的空间范围和时间范围内恒有：

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F(x,y,z,t)$$

这就是温度函数应当满足的偏微分方程。如果物体是均质的，则k,c和ρ均为常数。

令 $a^2=k/c\rho$

则方程可以改写为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

在没有热源的情况下，也就是说$F(x,y,z,t)=0$,上述方程可以进一步改写为齐次方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

如果该物体是一长度为L的均匀长杆，则热传导方程的形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x},x\in L$$

在物理上，该方程定义了热量在空间中传导的一种模式：$u(x,t)$代表了在一根两端绝缘的匀质细长棒中各个点的温度，它随着细棒长度x和时间t的变化而变化，其变化规律满足的方程就是我们所研究的二阶齐次线性偏微分方程。换句话说，二阶齐次线性偏微分方程在物理学中反映了一种热传导过程。

2 在相应的定解条件下，确定某一特定物理过程的具体状况

上面得出的只是热传导过程的一般规律，仅仅依靠它还不能确定某一特定物理过程的具体状况。为了确定具体的物理状况，不仅依靠传导方程，还必须另外附加条件。这在物理意义上很明显，只要知道物体在某一时刻t_0的温度分布和它在$t\geqslant t_0$时边界∂G上的热状态，就可以完全确定该物体在t_0以后时刻的温度变化情况，描述这些状况的数学条件分别称为初始条件和边界条件，通称为定解条件。

初始条件给出了t_0时刻的温度分布，即：

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\qquad (x,y,z)\in G$$

边界条件给出边界面∂G上的热状态，它的形式有以下三种情况。

第一边界条件：直接给出物体在边界∂G上的温度。

$$u\big|_{\partial G}=\varphi(x,y,z),\qquad (x,y,z)\in\partial G$$

第二边界条件：如果已知单位时间内通过∂G上单位面积从物体向外流出的热量，即已知热流强$q(x,y,z,t)=-k(x,y,z)\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G}$.

这时的边界就是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G}=\varphi(x,y,z),\ t\geqslant t_0$$

第三边界条件：如果已知物体周围介质温度$s(x,y,z,t)$,根据热交换定理，在单位时间内通过物体表面单位流向介质的热量q,同物体与介质在表面的温度成正比，即$q=h(u-s)$,其中h是热交换系数，仍然根据傅里叶定律，有：$-k\frac{\partial u}{\partial n}=q$

即 $k\frac{\partial u}{\partial n}=-h(u-s)$

因此，这时的边界条件为：

$$\left(k\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\Big|_{\partial G}=\varphi(x,y,z,t),t\geq t_0$$

其中φ为∂G上的已知函数。

由此我们可以得知，二阶齐次线性偏微分方程不仅刻画了一个随着时间不断演化的动态热传导过程，而且通过对传导方程加上初始条件和边界条件，还可以捕捉到某些特定的时刻，我们所关心的物理量的某种特殊状态，由此，我们对二阶齐次线性偏微分方程就有了更深刻的理解。

注释及参考文献:

[1]龚德恩.经济数学基础[M].成都:四川人民出版社,2005.

[2]邵宇.微观金融学及其数学基础[M].北京:清华大学出版社,2003.

（下转69页）

(Computer Network Center,Shangrao Normal College ,Shangrao,Jiangxi 334001)

Abstract: The topic of this article is the application of asynchronous invoking in the web–trouble–notification system. It analyses the asynchronous invoking in the .NET framework, discusses the essence of the asynchronous invoking in detail, and takes the indexing as an example to explain that the asynchronous invoking can improve the efficiency of the system.

Key words: Asynchronous invoking;NET framework;Web–trouble–notification system

（上接54页）

Analysis on the Essence of Second-order Homogenous Linear Partial Differential Equations with the Theory of Heat Exchange in Physics

DONG Li–hua

(Teachers College, Eastern Liaoning University, Dandong, Liaoning 118001)

Abstract: With the ordinary theory of Heat Exchange in physics, this essay visualizes the essence of second–order homogenous linear partial differential equations.

Key words: Second–order homogenous linear partial differential equations ; Theory of heat exchange

（上接64页）

[4] 03J104蒸压加气混凝土砌块建筑构造[S]. 中国建筑标准设计研究院, 2003,06.

Analysis and its Preventy Method on Infilled Wall of Ceramsite Hollow Unit

TANG Cheng–guang, XIAO Xiao

(Shaoguan Iron & Steel Group Corporation Ltd. , Qujiang, Guangdong 512123)

Abstract: The reason which produces on the Ceramsite hollow concrete block wall crack was analyzed. In view of appears the crack quality question, this paper proposes the prevention method to block wall crack, in order to achieve the application goal of the big area promotion ceramsite hollow concrete block wall in the industrial architecture.

Key words: Ceramsite hollow concrete ; Block wall ;Crack analysis ;Prevention method