格蕴涵代数、MV-代数和有界可换的BCK-代数

费秀海,胡方汉,张海芳,何天荣
(云南民族大学 数学与计算机科学学院,云南 昆明 650031)

【摘 要】本文证明了格蕴涵代数和有界可交换BCK-代数是两个等价的代数系统,以及MV-代数和有界可交换BCK-代数是两个等价的代数系统。

【关键词】BCK-代数;MV-代数;格蕴涵代数
【中图分类号】O153 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2008)01-0050-03

1 预备知识

定义[1]1.1 设X是一个非空集合,*是X上的一个二元运算,若满足下列条件,则称(X;*,0)为BCK-代数。

(1) $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$;

(2) $(x*(x*y))*y=0$;

(3) $x*x=0$;

(4) 若$x*y=y*x=0 \Rightarrow x=y$;

(5) $\forall x \in X, x*x=0$

其中 x, y, z 是X中任意元。

定义[1]1.2设(X;*,0)是BCK-代数,若存在元素$I \in X$,使得对任给的$x \in X$,都有$0 \le x \le I$,则称(X;*,0)是有界BCK-代数。

定义[1]1.3设(X;*,0)BCK-代数,若满下列条件,则(X;*,0)是可交换的BCK-代数。

(1) $\forall x,y \in X, x*(x*y)=y*(y*x)$

若(X;*,0)是有界BCK-代数且满足$\forall x$ 、$y \in X, x*(x*y)=y*(y*x)$,则(X;*,0)是有界可交换的BCK-代数。

定义[2]1.4设(X;+,′,0,1)是一个(2,1,1,0)型代数,若满足下列条件,则称(X;+,′,0,1)是一个MV-代数。

(1) $(x+y)+z=x+(y+z)$; (2) $x+y=y+x$; (3) $x+0=x$;

(4) $(x')'=x$; (5) $x+1=1$; (6) $x+x'=1$;

(7) $(x+y')'+x=(y+x')'+y$; 其 x 、y 、z 是X中的任意元。

定义[2]1.5设(X;→,0,1)是(2,0,0)型代数,若满足下列条件,则称(X;→,0,1)是一个格蕴涵代数。

(1) $0\to x=1$; (2) $(x\to 0)\to 0=x$; (3) $x\to y=(y\to 0)\to(x\to 0)$;

(4) $(x\to y)\to(x\to z)=(y\to x)\to(y\to z)$ 其中 x 、y 、z 是X中的任意元。

2 MV-代数与有界可交换的BCK-代数

2.1 现先证明有界可交换的BCK-代数是一个MV-代数

证明:设(X;*,0)是一个有界可交换的BCK-代数,且令$x+y=N(Nx*y)$和$x'=Nx, Nx=1*x$则有:

(MV-1): $$(x+y)+z=N(Nx*y)+z=N(N(N(Nx*y))*z)=N((Nx*y)*z)$$
$$=N((Ny*x)*z)=N((Ny*z)*x)=N(Nx*N(Ny*z))$$
$$=x+(y+z);$$

(MV-2): $x+y=N(Nx*y)=N(Ny*x)=y+x$;

(MV-3): $x+0=N(Nx*0)=NNx=x$;

(MV-4): $x+1=N(Nx*1)=N((1*x)*1)=N(0*x)=N0=1$

(MV-5): $(x')'=(Nx)'=N(Nx)=x$;

收稿日期:2008-01-07
作者简介:费秀海(1980-),男,硕士研究生,研究方向为半群理论及代数理论。

(MV–6): $x+x'=N(Nx*Nx)=N0=1$;

(MV–7): $(x+y')'+x=N(Nx*Ny)'+x=N(N(Nx*Ny))+x=Nx*Ny+x$

$$=N(N(Nx*Ny)*x)=N(Nx*(Nx*Ny))=N(Ny*(Ny*Nx))$$

$$=N(N(Ny*Nx)*y)=(y+x')'+y \quad ;$$

从而由上述证明可知有界可交换的BCK–代数是MV–代数。

2.2 现证明MV–代数是有界可交换的BCK–代数

证明:设(X;+, $'$,0,1)是一个MV–代数,令 $x*y=(x'+y)'$ 则:

(BCK–1) $((x*y)*(x*z))*(z*y)=((x'+y)'*(x'+z)')*(z'+y)'$

$$=((x'+y)+(x'+z')')'*(z'+y)'=((x'+y)+(x'+z)'+(z'+y)')'$$

$$=\left(\left(\left(x'+(z')'\right)'+x'\right)+\left((z'+y)'+y\right)\right)'=\left((x+z')'+z'+(y'+z)'+z\right)'$$

$$=\left[\left((x+z')'+(y'+z)'\right)+(z+z')\right]'=\left[\left[(x+z')'+(y'+z)'\right]+1\right]'$$

$$=(1)'=0;$$

(BCK–2) $(x*(x*y))*y=(x*(x'+y)')*y=\left(x'+\left((x'+y)'\right)'\right)'*y$

$$=\left(x'+(x'+y)'\right)'*y=\left(x'+(x'+y)'+y\right)'$$

$$\left((x'+y)+(x'+y)'\right)'=(1)'=0;$$

(BCK–3) $x*x=(x'+x)'=(1)'=0$;

(BCK–4)若 $x*y=0 \Leftrightarrow (x'+y)'=0 \Leftrightarrow x'+y=1$

$$y*x=0 \Leftrightarrow (y'+x)'=0 \Leftrightarrow y'+x=1$$

$$\Rightarrow x'=y' \text{且} x=y \quad ;$$

(BCK–5) $0*x=(0'+y)'=(0'+y)'=(1+y)'=(1)'=0$;

由上述证明可知有界可交换的BCK–代数和MV–代数是两个等价的代数系统。

3 格蕴涵代数和有界可交换的BCK–代数

证明:设(X;*,0)是一个有界可交换的BCK–代数, $x\to y=1*(x*y)$ 则:

(1) $0\to x=1*(0*x)=1*0=1$;

(2) $(x\to 0)\to 0=(1*(x*0))\to 0=(1*x)\to 0=1*((1*x)*0)=1*(1*x)$;

$$=x*(x*1)=x*0=x \quad ;$$

(3) $x\to y=1*(x*y)$ 而 $(y\to 0)\to(x\to 0)=(1*(y*0))\to(1*(x*0))$

$$=(1*y)\to(1*x)=1*((1*y)*(1*x))=1*(x*y)=x\to y;$$

(4) $(x\to y)\to(x\to z)=(1*(x*y))\to(1*(x*z))=1*((1*(x*y))*(1*(x*z)))$

$=1*((x*z)*(x*y))$ 而 $(y\to x)\to(y\to z)=(1*(y*x))\to(1*(y*z))$

$$=1*((1*(y*x))*(1*(y*z)))=1*((y*z)*(y*x))$$

$$=1*((y*(y*x))*z)=1*((x*(x*y))*z)=1*((x*z)*(x*y))$$

从而 $(x\to y)\to(x\to z)=(y\to x)\to(y\to z)$;

故由上述证明可知有界可交换的BCK–代数是格蕴涵代数。

现证明格蕴涵代数是有界可交换的BCK–代数。

证明过程略,由上述证明可知,格蕴涵代数和有界可交换的BCK–代数是两个等价的代数系统。

注释及参考文献:

[1] Isekik, Sanakas A introduction to the theory of Bck−algebras [J]. math Jupon ,1978:23.

[2] Huang Yisheny .BCI−Algebra[M].北京:科学出版社,2008.

[3]徐扬.格蕴涵代数[J].西安交通大学学报,1993(1):20−27.

[4]刘军.徐扬.格蕴涵代数的滤子与结构[J].科学通报,1997:(10):1049−1052.

[5]J.M.HOWIE .An introduction to semi group theory.

Lattice Inplication Algebra, MV-algebra and Bounded Commutative BCK-algebra

FEI Xiu–hai, HU Fang–han, ZHANG Hai–fang, HE Tian–rong

(School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Nationalities University, Kunming, Yunnan 650031)

Abstract:In this paper, we proved the lattice inplication algebra and bounded commutative BCK–algebra are two equational algebra systems, and MV–algebra and bounded commutative BCK–algebra are two equational algebra systems.

Key words:BCK–algebra; MV–algebra; Lattice inplication algebra

(上接49页)

注释及参考文献:

[1]东北师范大学数学系微分方程教研室编.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,1982.

[2]赵显曾.Riccati方程的通解 [J].数学的实践与认识,1987(2):69−72.

[3]曹恒.黎卡提方程几种特解的判定[J].数学的理论与应用.2002(4):82−84.

[4]冯录祥.一类黎卡提型方程的通积分[J] .数学的实践与认识.2000(2):235−239.

[5]冯录祥.一类Riccati方程的推广[J].数学的实践与认识,2003(5):115−119.

A New Integrable Type of Linear Differential Equation of 1-order

YE Chao, HU Jing–song

(College of Mathematics and Computer Engineering, Xihua University, Chengdu, Sichuan 610039)

Abstract:By the methods of variable substitution, the scheme for solving nonlinear differential equation of 1–order is presented and generalized to some new integrable types of the linear differential equation including Riccati equation. And integral sloution are obtained.

Key words:Variable substitution; Differential equation; Integrable types; Integral sloution