

一阶微分方程的几个新的可积类型

叶超, 胡劲松

(西华大学 数学与计算机学院, 四川 成都 610039)

【摘要】用“变量代换”法给出了一类非线性的一阶微分方程的求解方法, 然后通过推广得到了包括黎卡提(Riccati)方程在内的一阶微分方程的若干个新的可积类型, 同时给出了它们的通积分。

【关键词】变量代换; 微分方程; 可积类型; 通积分

【中图分类号】O175 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2008)01-0048-02

引言

在理论和实践中, 非线性微分方程有着极其广泛的应用, 而且越来越引起人们的注意。但是, 求解非线性微分方程问题, 却往往是很困难的。本文用“变量代换”法给出了非线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad (1)$$

(其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 $a, b \neq 0$) 的具体解法, 然后通过推广得到了包括黎卡提(Riccati)方程在内的一阶微分方程的几个新的可积类型。

1 主要结论

定理1 方程(1)为可积方程, 其通积分为: $\int \frac{d(ax + by + c)}{a + bf(ax + by + c)} = x$ 。

证 作变量变换, 设 $u = ax + by + c$, 则 $\frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$, 代入方程(1), 得

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u) \Rightarrow \frac{du}{a + bf(u)} = dx$$

两端积分, 并将 $u = ax + by + c$ 代入可得: $\int \frac{d(ax + by + c)}{a + bf(ax + by + c)} = x$ 。

定理2 方程

$$\phi'(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot f[\phi(x) + \phi(y)] - \phi'(x) \quad (2)$$

(其中 ϕ 、 ϕ' 、 f 和 g 均为 x 的连续函数) 为可积方程, 其通积分为:

$$\int \frac{d[\phi(x) + \phi(y)]}{f[\phi(x) + \phi(y)]} = \int g(x) dx。$$

证 设 $u = \phi(x) + \phi(y)$, 方法同定理1的证明。(略)

在定理2的方程(2)中, 令 $\phi(y) = y$, 有

推论1 方程

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot f[\phi(x) + y] - \phi'(x) \quad (3)$$

为可积方程, 其通积分为: $\int \frac{d[\phi(x) + y]}{f[\phi(x) + y]} = \int g(x) dx$ 。

在推论1的方程(3)中, 令 $g(x) = 1$, 有

推论2 方程 $\frac{dy}{dx} = f[\phi(x) + y] - \phi'(x)$ 为可积方程, 其通积分为: $\int \frac{d[\phi(x) + y]}{f[\phi(x) + y]} = x$ 。

定理3 黎卡提(Riccati)方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (4)$$

在满足条件: $4R - \frac{Q^2}{P} + 2(\frac{Q}{P})' = 0$ 时, 为可积方程。其通积分为: $-\frac{1}{y + \frac{Q}{2P}} = \int P dx$ 。

证 由条件知, $R = \frac{Q^2}{4P} - (\frac{Q}{2P})'$, 代入方程(4)即为

收稿日期: 2007-09-28

作者简介: 叶超(1977-), 男, 助教, 主要从事基础数学的教学及研究。

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + \frac{Q^2}{4P} - \left(\frac{Q}{2P}\right)' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = P\left(y + \frac{Q}{2P}\right)^2 - \left(\frac{Q}{2P}\right)'$$

这是属于方程(3)的类型(这时, $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \frac{Q}{2P}$, $g(x) = P$)。设 $u = y + \frac{Q}{2P}$, 可将方程(4)转化为: $\frac{du}{dx} = Pu^2$, 解之, 并将 $u = y + \frac{Q}{2P}$ 代入可得其通积分: $-\frac{1}{y + \frac{Q}{2P}} = \int P dx$ 。

在方程(4)中, 令 $P(x) = 1$, 有

推论3 黎卡提(Riccati)方程 $\frac{dy}{dx} = y^2 + Q(x)y + R(x)$ 在满足条件: $4R - Q^2 + 2Q' = 0$, 为可积方程, 其通积分为: $\frac{1}{y + \frac{Q}{2}} + x = C$ (其中, C 为任意常数)。

2 例子

例1 求方程 $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+y-1}{x+y+1}\right)^2$ 的通积分。

解 将该方程变形为: $\frac{dy}{dx} = \left[\frac{(x+y-1)}{(x+y-1)+2}\right]^2$ 。由定理1, 设 $u = x+y-1$, 则 $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, 代入原方程, 有

$$\frac{du}{dx} = 1 + \left(\frac{u}{u+2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2u+2}{u^2+2u+2}\right) du = dx \Rightarrow \frac{u}{2} + \ln(u^2+2u+2) = x+C$$

即可得原方程的通积分: $\frac{y-x}{2} + \ln(x^2+y^2+2xy+1) = C$ 。

例2 求方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{y \cos x + \cos^2 x} + \sin x$ 的通积分。

解 将该方程变形为: $\frac{dy}{dx} = \tan x \cdot \frac{1}{y + \cos x} - (\cos x)'$ 。由推论1, 设 $u = y + \cos x$, 则 $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - \sin x$, 代入原方程, 有 $\frac{du}{dx} = \tan x \cdot \frac{1}{u} \Rightarrow u du = \tan x dx \Rightarrow \frac{1}{2} u^2 = -\ln \cos x + C$

即可得原方程的通积分: $(y + \cos x)^2 + 2 \ln \cos x = C$ 。

例3 求黎卡提(Riccati)方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^3} y^2 + \frac{1}{x} y + \frac{3}{4} x$ 的通积分。

解 $P = -\frac{1}{x^3}$, $Q = \frac{1}{x}$, $R = \frac{3}{4} x$, 于是满足 $4R - Q^2 + 2\left(\frac{Q}{P}\right)' = 0$ 。由定理3, 设 $u = y + \frac{Q}{2P} = y - \frac{1}{2} x^2$, 即

可得原方程的通积分:

$$-\frac{1}{y - \frac{1}{2} x^2} = \int -\frac{1}{x^3} dx \Rightarrow y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{2x^2}{1 + Cx^2}$$

例4 求黎卡提(Riccati)方程 $\frac{dy}{dx} = y^2 - \tan x \cdot y + \frac{3}{4} \tan^2 x + \frac{1}{2}$ 的通积分。

解 $Q = -\tan x$, $R = \frac{3}{4} \tan^2 x + \frac{1}{2}$, 于是满足 $4R - Q^2 + 2Q' = 0$ 。由推论3, 设 $u = y + \frac{Q}{2} = y - \frac{1}{2} \tan x$, 即可得

原方程的通积分:

$$\frac{1}{y - \frac{1}{2} \tan x} + x = C \Rightarrow y = \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{C - x}$$

3 结束语

在教材^[1]第23页的方程(1.17): $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ 中, 如果行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, 即可以用定理1来求解。(例1即是如此)

1841年, 刘维尔(Liouville)^[2]证明了黎卡提(Riccati)方程(4)除了某些特殊情形以外, 对一般的函数 P, Q 和 R 而言, 其通积分不可能用初等函数或初等函数的积分来表示。但由于黎卡提(Riccati)方程在微分方程理论中占有重要的位置, 所以, 对方程(4)的求解有过很多的讨论和研究^[2-5], 也得到了关于方程(4)的很多可积类型, 本文的定理3(及其推论)也是黎卡提(Riccati)方程(4)的一个可积类型。

(下转52页)

现证明格蕴涵代数是有限可交换的BCK-代数。

证明过程略,由上述证明可知,格蕴涵代数和有限可交换的BCK-代数是两个等价的代数系统。

注释及参考文献:

- [1] Isekik, Sanakas A introduction to the theory of Bck-algebras [J]. math Jupon ,1978:23.
- [2] Huang Yisheny .BCI-Algebra[M].北京:科学出版社,2008.
- [3]徐扬.格蕴涵代数[J].西安交通大学学报,1993(1):20-27.
- [4]刘军.徐扬.格蕴涵代数的滤子与结构[J].科学通报,1997:(10):1049-1052.
- [5]J.M.HOWIE .An introduction to semi group theory.

Lattice Implication Algebra, MV-algebra and Bounded Commutative BCK-algebra

FEI Xiu-hai, HU Fang-han, ZHANG Hai-fang, HE Tian-rong

(School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Nationalities University, Kunming, Yunnan 650031)

Abstract:In this paper, we proved the lattice implication algebra and bounded commutative BCK-algebra are two equational algebra systems, and MV-algebra and bounded commutative BCK-algebra are two equational algebra systems.

Key words:BCK-algebra; MV-algebra; Lattice implication algebra

(上接49页)

注释及参考文献:

- [1]东北师范大学数学系微分方程教研室编.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,1982.
- [2]赵显曾.Riccati方程的通解 [J].数学的实践与认识,1987(2):69-72.
- [3]曹恒.黎卡提方程几种特解的判定[J].数学的理论与应用.2002(4):82-84.
- [4]冯录祥.一类黎卡提型方程的通积分[J].数学的实践与认识.2000(2):235-239.
- [5]冯录祥.一类Riccati方程的推广[J].数学的实践与认识,2003(5):115-119.

A New Integrable Type of Linear Differential Equation of 1-order

YE Chao, HU Jing-song

(College of Mathematics and Computer Engineering, Xihua University, Chengdu, Sichuan 610039)

Abstract:By the methods of variable substitution, the scheme for solving nonlinear differential equation of 1-order is presented and generalized to some new integrable types of the linear differential equation including Riccati equation. And integral sloution are obtained.

Key words:Variable substitution; Differential equation; Integrable types; Integral sloution