第22卷第1期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.22,NO.1
2008年3月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Mar.,2008

一类含参变量的广义积分的计算

钱学明
(无锡科技职业学院 基础部,江苏 无锡 214028)

【摘 要】在通行的一些《数学分析》教材中,对于含参变量的广义积分往往是通过在积分号下求导以及交换积分次序来计算,但这种方法对某些含参变量的广义积分而言,如 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{1+\omega^2}d\omega$ 等,该方法就显得无能为力了。本文从双边指数函数和接通正弦、余弦函数出发,利用Fourier变换的方法,解决上述含参变量的广义积分,并给出与此相关的一类含参变量的广义积分的结果。

【关键词】含参变量的广义积分;Fourier变换;双边指数函数;接通正弦函数;接通余弦函数
【中图分类号】O174 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2008)01-0041-07

在通行的一些《数学分析》[4][5]教材中,往往利用积分号下求导以及交换积分次序来计算含参变量的广义积分。但对于某些含参变量的广义积分而言,如 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{1+\omega^2}d\omega$ 和 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\pi\omega\cdot\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega$ 等,该方法就显得无能为力了。本文将从双边指数函数和接通正弦、余弦函数出发,利用Fourier变换的方法,解决上述含参变量的广义积分,并给出与此相关的一类含参变量的广义积分的结果。

一 Fourier变换的概念

1. Fourier积分定理 设函数f(t)满足以下两个条件:

(1)f(t)在任意有限区间[a,b]上满足狄利克雷条件,

(2)f(t)在(-∞,+∞)上绝对可积,即广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$ 收敛,

则含参变量ω的广义积分 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$ 收敛,且

在f(t)的连续点处,$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$ 成立;

在f(t)的间断点处,$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$ 成立。

我们知道,若函数f(t)满足上述Fourier积分定理的条件,则在f(t)的连续点处,有

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$ 成立。

若记 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$, (1)

则有 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ 。 (2)

从上面两式可以看出,(1)式和(2)式定义了一个变换对,即对于任一已知函数f(t),通过指定的积分运算,可以得到一个与之对应的函数F(ω),而F(ω)通过类似的积分运算,可以回复到f(t)。它们具有非常优美的对称形式。由于它们是从Fourier级数得来的,因此我们给出如下定义:

2. Fourier变换的定义 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ 称为Fourier变换,其中函数F(ω)称为f(t)的像函数,记为F(ω)=F[f(t)];$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ 称为Fourier逆变换,其中函数f(t)称为F(ω)的像原函数,记为f(t)=F^{-1}[F(ω)]。

这样,f(t)和F(ω)通过指定的积分运算可以相互表达,构成一个Fourier变换对。

3. Fourier变换的两条性质

在下面的计算中我们将用到Fourier变换的两条重要性质——线形性质和位移性质。

线性性质 若 $\mathscr{F}[f_k(t)]=F_k(\omega)$ ($k=1,2,\cdots,n$),则 $\mathscr{F}\left[\sum_{k=1}^{n}a_kf_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{n}a_kF_k(\omega)$, (3)

式中 a_k ($k=1,2,\cdots,n$)为任意常数,n为有限正整数。

收稿日期:2008-01-02
作者简介:钱学明(1981-),男,汉族,江苏无锡人,硕士,助教,主要从事高等数学、积分变换教学研究。

Fourier变换的线性性质，可由Fourier变换的定义直接得到。该性质说明，有限个函数的线性组合的Fourier变换等于各函数Fourier变换的线性组合。

位移性质 若$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，$t_0$为实常数，则$\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=e^{\pm i\omega t_0}F(\omega)$ 。 (4)

(4)式称为Fourier变换的时域平移性。该性质表明时间函数f(t)沿t轴向左或向右平移t_0后的Fourier变换等于f(t)的Fourier变换乘以因子$e^{i\omega t_0}$或$e^{-i\omega t_0}$。即当函数（信号）沿时间轴平移后，它的各频率成分的大小不变，只是相位发生变化。

4. δ函数及其性质

为了方便计算，我们在这里简单地介绍δ函数的描述性定义及其筛选性质。

定义 如果函数$\delta(t-t_0)$满足① $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$，② $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1$或者$\int_L\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1$，其中L是含有$t=t_0$的任何一个区间，则称$\delta(t-t_0)$为冲激发生在$t=t_0$处的δ函数。

δ函数的筛选性质 若f(t)是定义在实数域R上的有界函数，且在$t=t_0$处连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0)\text{。} \quad (5)$$

该性质称为δ函数的筛选性质，因为它把函数f(t)在点$t=t_0$处的值$f(t_0)$筛选出来了。其中式由于给出了δ函数和其它函数的运算关系，因此也常常被人们用来定义δ函数。

二 一些重要函数的Fourier变换

1. 双边指数函数$f(t)=e^{-\alpha|t|}\ (\alpha>0)$的Fourier变换

由Fourier变换的定义式(1)，可得

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

即$\mathscr{F}[e^{-a|t|}]=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$ 。 (6)

利用Fourier变换的位移性质(4)式，可得

$$\mathscr{F}[e^{-a|t-b|}]=e^{-i\omega b}\frac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad (7)$$

$$\mathscr{F}[e^{-a|t+b|}]=e^{i\omega b}\frac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad (8)$$

将(7)式和(8)式相加，由Fourier变换的线性性质，并利用欧拉公式$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$，可得

$$\mathscr{F}[e^{-a|t+b|}+e^{-a|t-b|}]=(e^{i\omega b}+e^{-i\omega b})\frac{2a}{a^2+\omega^2}=4a\frac{\cos b\omega}{a^2+\omega^2}$$

即 $\mathscr{F}[e^{-a|t+b|}+e^{-a|t-b|}]=4a\dfrac{\cos b\omega}{a^2+\omega^2}$， (9)

将(7)式和(8)式相减，由Fourier变换的线性性质，并利用欧拉公式$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$，可得

$$\mathscr{F}[e^{-a|t+b|}-e^{-a|t-b|}]=(e^{i\omega b}-e^{-i\omega b})\frac{2a}{a^2+\omega^2}=4ia\frac{\sin b\omega}{a^2+\omega^2}$$

即 $\mathscr{F}[e^{-a|t+b|}-e^{-a|t-b|}]=4ia\dfrac{\sin b\omega}{a^2+\omega^2}$ 。 (10)

2. 接通正弦函数$f(t)=u(t)\sin at$的Fourier变换

其中u(t)为单位阶跃函数，即$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 。

由于$\mathscr{F}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}$，并利用Fourier变换的线性性质(3)式和位移性质(4)式，可得

$$\mathscr{F}[u(t)\sin at]=\mathscr{F}\left[u(t)\cdot\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right]=\frac{1}{2i}\left(\mathscr{F}[u(t)e^{iat}]-\mathscr{F}[u(t)e^{-iat}]\right)=\frac{1}{2i}\left[\pi\delta(\omega-a)+\frac{1}{i(\omega-a)}-\pi\delta(\omega+a)-\frac{1}{i(\omega+a)}\right]$$

$$=\frac{a}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi i}{2}[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]\text{；} \quad (11)$$

同理,接通余弦函数 $f(t)=u(t)\cos at$ 的Fourier变换为

$$\mathscr{F}[u(t)\cos at]=\frac{i\omega}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]\text{。}\tag{12}$$

三 利用Fourier变换求解一类含参变量的广义积分

从双边指数函数Fourier变换和接通正弦、余弦函数Fourier变换以及与其相关的Fourier变换出发,我们可以得到它们相对应的Fourier逆变换,根据Fourier逆变换的定义式(2)式,当参变量取某些特殊值时,便可得到一类含参变量的广义积分的解。

1. 由(9)式,可得 $\mathscr{F}^{-1}[\frac{\cos b\omega}{a^2+\omega^2}]=\frac{1}{4a}[e^{-a|t+b|}+e^{-a|t-b|}]$,

根据Fourier逆变换的定义式(2)式,可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{a^2+\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{4a}(e^{-a|t+b|}+e^{-a|t-b|})\text{ ,即 }\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{a^2+\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{\pi}{2a}(e^{-a|t+b|}+e^{-a|t-b|})$$

由欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,可知

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{a^2+\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{a^2+\omega^2}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\,d\omega\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos b\omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos b\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos b\omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega\\&=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos b\omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega\end{aligned}$$

所以, $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos b\omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{4a}(e^{-a|t+b|}+e^{-a|t-b|})$ 。　　(13)

若令t=0,则得到 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2a}e^{-a|b|}$;　　(14)

若令t=0,a=0, 又可得 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|b|}$ 。　　(15)

2. 由(10)式,可得 $\mathscr{F}^{-1}[\frac{\sin b\omega}{a^2+\omega^2}]=\frac{i}{4a}(e^{-a|t-b|}-e^{-a|t+b|})$,

根据Fourier逆变换的定义式(2)式,可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin b\omega}{a^2+\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{i}{4a}(e^{-a|t-b|}-e^{-a|t+b|})\text{ ,即 }\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin b\omega}{a^2+\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{\pi i}{2a}(e^{-a|t-b|}-e^{-a|t+b|})$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin b\omega}{a^2+\omega^2}e^{i\omega t}\,d\omega&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin b\omega}{a^2+\omega^2}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\,d\omega\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin b\omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin b\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega\\&=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin b\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega\\&=2i\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin b\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega\end{aligned}$$

所以, $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin b\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{4a}(e^{-a|t-b|}-e^{-a|t+b|})$ 。　　(16)

若令a=0,则得到 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin b\omega\sin\omega t}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{4}(e^{-|t-b|}-e^{-|t+b|})$ 。　　(17)

3. 由(11)式,可得 $\mathscr{F}^{-1}[u(t)\sin at]=\frac{a}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi i}{2}[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]$,

根据Fourier逆变换的定义式(2)式,可得

$$u(t)\sin at=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{a}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi i}{2}[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]\right\}e^{i\omega t}\,d\omega$$

根据积分的线性性质及δ函数的筛选性质(5)式,可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{a}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi i}{2}[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]\right\}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega+\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+a)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega-\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-a)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega+\frac{i}{4}e^{-iat}-\frac{i}{4}e^{iat}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2i}(e^{iat}-e^{-iat})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}\sin at$$

所以,$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{2\pi}{a}u(t)\sin at+\frac{\pi}{a}\sin at$;

又由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2-\omega^2}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

因此,$2\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{2\pi}{a}u(t)\sin at+\frac{\pi}{a}\sin at$;

即 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{a}u(t)\sin at+\frac{\pi}{2a}\sin at$。 (18)

亦即 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{3\pi}{2a}\sin t\,,t>0\\ \frac{\pi}{2a}\sin t\,,t<0\end{cases}$

若取a=1则 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\pi u(t)\sin t+\frac{\pi}{2}\sin t$。 (19)

即 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{3\pi}{2}\sin t\,,t>0\\ \frac{\pi}{2}\sin t\,,t<0\end{cases}$

进一步讨论:

在上述结论(19)式中,将t替换为t-π,则

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega(t-\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\pi u(t-\pi)\sin(t-\pi)+\frac{\pi}{2}\sin(t-\pi),$$

即 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega(t-\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-\pi u(t-\pi)\sin t-\frac{\pi}{2}\sin t$; (20)

在上述结论(19)式中,将t替换为t+π,则

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega(t+\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\pi u(t+\pi)\sin(t+\pi)+\frac{\pi}{2}\sin(t+\pi),$$

即 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega(t+\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-\pi u(t+\pi)\sin t-\frac{\pi}{2}\sin t$; (21)

将(20)和(21)两式相加,可得

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega(t+\pi)+\cos\omega(t-\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-\pi\sin t-\pi[u(t+\pi)+u(t-\pi)]\sin t;$$

而 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega(t+\pi)+\cos\omega(t-\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\int_{0}^{+\infty}\frac{2\cos\omega t\cos\pi\omega}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega$,

$-\pi\sin t-\pi[u(t+\pi)+u(t-\pi)]\sin t=-\pi\sin t-\pi u(t+\pi)\sin t$,

于是,$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t\cos\pi\omega}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-\frac{\pi}{2}\sin t-\frac{\pi}{2}\sin t\,u(t+\pi)$。 (22)

即 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t\cos\pi\omega}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}-\pi\sin t\,,t>-\pi\\ -\frac{\pi}{2}\sin t\,,t<-\pi\end{cases}$

将(20)和(21)两式相减,可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega(t-\pi)-\cos\omega(t+\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-\pi u(t-\pi)\sin t-\frac{\pi}{2}\sin t+\pi u(t+\pi)\sin t+\frac{\pi}{2}\sin t$$
$$=\pi\sin t[u(t+\pi)-u(t-\pi)]\quad;$$

而，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega(t-\pi)-\cos\omega(t+\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t\sin\pi\omega}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega$

于是，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t\sin\pi\omega}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\sin t[u(t+\pi)-u(t-\pi)]$。 (23)

即 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t\sin\pi\omega}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|<\pi\\ 0, & |t|\ge\pi\end{cases}$

4. 由(12)式，可得 $\mathcal{F}^{-1}[u(t)\cos at]=\frac{i\omega}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]$，

根据Fourier逆变换的定义式(2)式，可得

$$u(t)\cos at=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{i\omega}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]\right\}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

根据积分的线性性质及δ函数的筛选性质(5)式，可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{i\omega}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]\right\}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\omega}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+a)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-a)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{4}(e^{-iat}+e^{iat})$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}\cos at$$

所以，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=-2\pi iu(t)\cos at-\pi i\cos at$ ；

又由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{a^2-\omega^2}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{a^2-\omega^2}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\mathrm{d}\omega$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega\cos\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega$$
$$=2i\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

因此，$2i\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-2\pi iu(t)\cos at-\pi i\cos at$ ；

即 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-\pi u(t)\cos at-\frac{\pi}{2}\cos at$ 。 (24)

亦即 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{a^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}\cos at, & t>0\\ -\frac{\pi}{2}\cos at, & t<0\end{cases}$

若取a=1，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-\pi u(t)\cos t-\frac{\pi}{2}\cos t$ 。 (25)

即 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}\cos t, & t>0\\ -\frac{\pi}{2}\cos t, & t<0\end{cases}$

进一步讨论：

在上述结论(25)式中，将t替换为t−π，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega(t-\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-\pi u(t-\pi)\cos(t-\pi)-\frac{\pi}{2}\cos(t-\pi),$$

即 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega(t-\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\pi u(t-\pi)\cos t+\frac{\pi}{2}\cos t$ ； (26)

在上述结论(25)式中，将t替换为t+π，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega(t+\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=-\pi u(t+\pi)\cos(t+\pi)-\frac{\pi}{2}\cos(t+\pi),$$

即 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega(t+\pi)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\pi u(t+\pi)\cos t+\frac{\pi}{2}\cos t$ ； (27)

将(26)和(27)两式相加,可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega[\sin\omega(t+\pi)+\sin\omega(t-\pi)]}{1-\omega^2}d\omega=\pi\cos t+\frac{\pi}{2}\cos t+\frac{\pi}{2}\cos t=2\pi\cos t;$$

而 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega[\sin\omega(t+\pi)+\sin\omega(t-\pi)]}{1-\omega^2}d\omega=\int_0^{+\infty}\frac{2\omega\sin\omega t\cos\omega\pi}{1-\omega^2}d\omega$,

于是,$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t\cos\omega\pi}{1-\omega^2}d\omega=\pi\cos t$。 (28)

将(26)和(27)两式相减,可得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\omega[\sin\omega(t-\pi)-\sin\omega(t+\pi)]}{1-\omega^2}d\omega&=\pi u(t-\pi)\cos t+\frac{\pi}{2}\cos t-\pi u(t+\pi)\cos t-\frac{\pi}{2}\cos t\\&=\pi\cos t[u(t-\pi)-u(t+\pi)]\end{aligned};$$

而 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega[\sin\omega(t-\pi)-\sin\omega(t+\pi)]}{1-\omega^2}d\omega=\int_0^{+\infty}\frac{\omega[-2\cos\omega t\sin\pi\omega]}{1-\omega^2}d\omega=-2\int_0^{+\infty}\frac{\omega\cos\omega t\sin\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega$,

于是,$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\cos\omega t\sin\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}\cos t[u(t+\pi)-u(t-\pi)]$。 (29)

即 $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\cos\omega t\sin\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos t, & |t|<\pi\\ 0, & |t|\ge\pi\end{cases}$

四 小结

通过上述的推导计算,我们发现从双边指数函数以及接通正弦、余弦函数出发,利用Fourier变换及其性质,可以得到一类用普通方法很困难甚至无法求出的含参变量的广义积分的解。现整理如下:

1. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos b\omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{4a}(e^{-a|t+b|}+e^{-a|t-b|})$,

当t=0时,$\int_0^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2a}e^{-a|b|}$;当t=0,a=1时,$\int_0^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|b|}$。

2. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin b\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{4a}(e^{-a|t-b|}-e^{-a|t+b|})$,

当a=1时,$\int_0^{+\infty}\frac{\sin b\omega\sin\omega t}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{4}(e^{-|t-b|}-e^{-|t+b|})$。

3. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{a^2-\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{a}u(t)\sin at+\frac{\pi}{2a}\sin at=\begin{cases}\frac{3\pi}{2a}\sin t, & t>0\\ \frac{\pi}{2a}\sin t, & t<0\end{cases}$,

当a=1时,$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\pi u(t)\sin t+\frac{\pi}{2}\sin t=\begin{cases}\frac{3\pi}{2}\sin t, & t>0\\ \frac{\pi}{2}\sin t, & t<0\end{cases}$。

4. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t\cos\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega=-\frac{\pi}{2}\sin t-\frac{\pi}{2}\sin t\,u(t+\pi)=\begin{cases}-\pi\sin t, & t>-\pi\\ -\frac{\pi}{2}\sin t, & t<-\pi\end{cases}$,

当t=0时,$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega=0$。

5. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t\sin\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}\sin t[u(t+\pi)-u(t-\pi)]=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|<\pi\\ 0, & |t|\ge\pi\end{cases}$。

6. $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{a^2-\omega^2}d\omega=-\pi u(t)\cos at-\frac{\pi}{2}\cos at=\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}\cos at, & t>0\\ -\frac{\pi}{2}\cos at, & t<0\end{cases}$,

当a=1时,$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=-\pi u(t)\cos t-\frac{\pi}{2}\cos t=\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}\cos t, & t>0\\ -\frac{\pi}{2}\cos t, & t<0\end{cases}$

7. $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t\cos\omega\pi}{1-\omega^2}d\omega=\pi\cos t$。

8. $\int_0^{+\infty}\frac{\omega\cos\omega t\sin\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}\cos t[u(t+\pi)-u(t-\pi)]=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos t, & |t|<\pi\\ 0, & |t|\ge\pi\end{cases}$,

当t=0时,$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}$。

显然,根据上述含参变量的广义积分的解,若使参变量取某些特殊值,我们还能确定其对应的实变量的广义积分。

注释及参考文献:

[1]张元林. 积分变换(第四版)[M]. 北京:高等教育出版社,2003,5.
[2]白艳萍,雷英杰,扬明. 复变函数与积分变换[M]. 北京:国防工业出版社,2004,8.
[3]华中科技大学数学系. 复变函数与积分变换(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,2003,6.
[4]华东师范大学数学系. 数学分析(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,1991,10.
[5]陈传璋,金福临,胡家赣,等. 数学分析(第二版)[M]. 上海:科学技术出版社,1962,12.

Solving a Class of Improper Integral with Parameter

QIAN Xue-Ming
(Wuxi Professional College of Science and Technology, Wuxi ,Jiangsu 214028)

Abstract: In textbooks of《Analysis》, it usually solves improper integral with parameter through derivation in the presentation of integration and exchanging the order of integral. But those methods seem disabled in some of improper integral with parameter, such as $\int_0^{+\infty} \frac{\cos b\omega}{1+\omega^2} d\omega$ and so on. This paper will solve the improper integral with parameter above on the methods of Fourier transform, from cut-in sine function、cut-in cosine function and two-sided exponential function. Meanwhile, it gives the result of a class of relating improper integral with parameter.

Key words: Improper integral with parameter; Fourier transform; Two-sided exponential function; Cut-in sine function; Cut-in cosine function

(上接40页)

注释及参考文献:

[1]J.F.Traub, G.W.Wasilkowski and H.Wozniakowski, Information-Based Complexity[M].New York:Academic Press,1988.
[2]Yongsheng Sun,Chenyong Wang, Average Error Bound of Best Approximation of Continuous Function on the Wiener Space[J].Journal of Complexity,1995,(11):74-104.
[3]Klaus Ritter. Approximation and Optimization on the Wiener Space[J].Journal of Complexity,1990,(6):337-364.
[4]Mark Kon, Leszek Plaskota, Information-based nonlinear approximation: an average case seting[J].Journal of Complexity, 2005, (21):211-229.
[5]A.K.Varma,J.Prasad.An Analogue of a Problem of P.Erdos and E.Feldheim on Convergence of interpolatory Processes[J]. Journal of Approximation Theory,1989(56):225-240.
[6]许贵桥.Lagrange插值和Hermite-Fejer插值在Wiener空间下的平均误差[J].数学学报中文版,2007,50(6).

The Average Error of a Kind of Modified Hermite-Fejer Interpolation in Wiener Space

CAO Li
(College of Mathematic Science,Tianjin Normal University,Tianjin 300387)

Abstract: In this paper, we obtain the weakly asymptotic order for the average error of the Egervary -Turan Hermite-Fejer interpolation based on the extended zeros of Tchebycheff polynomials of the first kind in the Wiener space.

Key words: Tchebycheff polynomials; Egervary-Turan Hermite-Fejer interpolation polynomials; Wiener space