# 一种修正的Hermite-Fejer插值算子于Wiener空间下的平均误差*

曹 莉

(天津师范大学 数学科学学院,天津 300387)

【摘 要】得到了以扩充的第一类Chebyshev多项式的零点为插值结点组的Egervary-Turan修正Hermite-Fejer插值多项式在Wiener空间下的平均误差的弱渐进阶.

【关键词】Chebyshev多项式;Egervary-Turan修正Hermite-Fejer插值多项式;Wiener空间

【中图分类号】O174.42 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2008)01-0039-02

## 1 引言及结果

设F是一个实可分的Banach空间,$\mu$ 是定义在F上的Borel子集上的概率测度。设G为另一个范数为$\|\cdot\|$的线性赋范空间,F连续嵌入到G.任意使得$f\to\|f-A(f)\|$为可测映照的算子$A:F\to G$被称为一个逼近算子。算子A的$P$-平均误差定义为

$$e_p(A,G)=\left(\int_F\|f-A(f)\|^p\,\mu(df)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

在实际问题中,目标函数常常仅由有限点的函数值给出,因此逼近算子$A(f)$常常仅由函数$f$在相应点的值给出.许多文章都研究了这种算子在平均情形下的计算复杂性。考虑到插值算子是一类仅依赖于函数$f$在有限点的值的重要逼近工具,本文将考虑以扩充的第一类Chebycheff多项式的零点为插值结点组的Egervary-Turan修正Hermite-Fejer插值算子在Wiener测度下的平均误差。

设$C=\{f:[0,1]\to R\mid f\in C[0,1],\ f(0)=0\}$,其中$C[0,1]$表示$[0,1]$上的连续函数的全体。定义在C上的Wiener测度$\omega$由下列性质唯一确定:对任意$n\ge1$, $B\in\beta(R^n)$ ($R^n$上的Borel可测集的全体)及$0=t_0<t_1<\cdots<t_n\le1$

$$\omega(f\in C:(f(t_1),f(t_2),\cdots,f(t_n))\in B)$$
$$=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j-t_{j-1})}}\int_B\exp\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{-(u_j-u_{j-1})^2}{2(t_j-t_{j-1})}\Big)du_1\cdots du_n \quad (2)$$

其中$u_0=0$ .文献[1]可知

$$\int_C f(x_1)f(x_2)\omega(df)=\min\{x_1,x_2\},\ \forall x_1,x_2\in[0,\ 1] \quad (3)$$

设$F=\{f\in C[-1,1]:g(t)=f(2t-1)\in C\}$,且对任意可测子集$A\subset F$,我们定义

$$\upsilon(A)=\omega(\{g(t)=f(2t-1),\ f\in A\})$$

令$x_k\equiv x_{kn}=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ,$k=1,2,\cdots,n$, 为第一类Chebycheff多项式$T_n(x)=\cos n\theta$ ,$x=\cos\theta$的零点,以$\{x_k\}_{k=1}^{n}$为插值节点组的$f$的Hermite-Fejer插值多项式为[5]:

$$H_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)h_k(x)$$

其中$h_k(x)=(1-xx_k)\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right)^2\ge0$ ,$\sum_{k=1}^{n}h_k(x)\equiv1$

文献[5]同时给出了Egervary-Turan修正的Hermite-Fejer插值多项式,即:$Q_n(f,x)=H_n(f,x)+(f(1)-H_n(f,1))\left(\frac{1+x}{2}\frac{T_n(x)}{T_n(1)}\right)^2+(f(-1)-H_n(f,-1))\left(\frac{1-x}{2}\frac{T_n(x)}{T_n(-1)}\right)^2$

可知

$$Q_n(f,x_k)=f(x_k),\ Q_n'(f,x_k)=0,\ (k=1,2,\cdots,n)$$
$$Q_n(f,\pm1)=f(\pm1)$$

文献[6]考虑了以第一类Chebycheff的零点为插值节点组的Hermite-Fejer插值多项式$H_n(f,x)$在Wiener空间下的平均误差。本文在原文的基础上进一步研究$Q_n(f,x)$在Wiener空间下的平均误差,得到:

定理:设$Q_n(f,x)$,F定义如上,则有

$$e_2(Q_n,L_2)\cong\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (4)$$

$$e_4(Q_n,L_4)\cong\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (5)$$

其中这里及以下的$A(n)\cong B(n)$均表示存在与n无关的正数$c_1$及$c_2$使得$c_1A(n)\le B(n)\le c_2A(n)$

## 2 定理的证明

在证明定理之前,我们先来介绍以下两个易证的引理

引理1 $\int_{-1}^{1}\frac{T_n^4(x)(1+x)^4}{4}dx=\int_{-1}^{1}\frac{T_n^4(x)(1-x)^4}{4}dx\le\frac{3}{5}$和$\int_{-1}^{1}\frac{T_n^8(x)(1+x)^8}{4}dx=\int_{-1}^{1}\frac{T_n^8(x)(1-x)^8}{4}dx\le\frac{35}{9}$

引理2[6]当 $0\le x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le1$

$$\int_C f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)\omega(df)=2x_1x_2+x_1x_3$$

定理的证明 (1)首先证明(4),记

$$Q_n^0(f,x)=(f(1)-H_n(f,1))\left(\frac{1+x}{2}\frac{T_n(x)}{T_n(1)}\right)^2+$$
$$(f(-1)-H_n(f,-1))\left(\frac{1-x}{2}\frac{T_n(x)}{T_n(-1)}\right)^2$$

因此

$$e_2^2(Q_n(f,x),L_2)=\int_F\int_{-1}^{1}|f(x)-Q_n(f,x)|^2dx\upsilon(df)$$
$$\le2\int_F\int_{-1}^{1}|f(x)-H_n(f,x)|^2dx\upsilon(df)+2\int_F\int_{-1}^{1}|Q_n^0(f,x)|^2dx\upsilon(df)$$
$$=A_1+A_2 \qquad (6)$$

收稿日期:2007-09-28

*基金项目:国家自然基金项目(项目编号:10471010)。

作者简介:曹 莉(1984- ),男,硕士研究生,主要研究方向为插值法与逼近论。

根据文献[6]的结论可得

$$A_1 \cong \frac{1}{n} \tag{7}$$

由 $Q_n^0(f,x)$ 的定义可得

$$A_2 \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{T_n^4(x)(1+x)^4}{4}dx \int_F \left|f(1)-H_n(f,1)\right|^2 \upsilon(df)$$

$$+\int_{-1}^{1} \frac{T_n^4(x)(1-x)^4}{4}dx \int_F \left|f(-1)-H_n(f,-1)\right|^2 \upsilon(df)$$

当i≤j时,通过(2)可得

$$\int_F (f(1)-f(x_i))(f(1)-f(x_j))\upsilon(df)=\frac{1-x_i}{2}$$

由上式得

$$\int_F \left|f(1)-H_n(f,1)\right|^2 \upsilon(df)=\int_F \left|\sum_{k=1}^{n} h_k(1)(f(1)-f(x_k))\right|^2 \upsilon(df)$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k^2(1)+\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)=B_1+B_2$$

由 $(1-x_k)h_k(1)=\frac{1}{n^2}, 0\le h_k(1)\le 1$ 和 $\sum_{k=1}^{n}h_k(x)\equiv 1$ 可得

$$B_1=\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}h_k(1)=\frac{1}{2n^2};$$

$$B_2=\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)\le\frac{1}{n}$$

$$B_1+B_2\le\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n}\le\frac{3}{2n}.$$

又当i≤j时,通过(2)也可得

$$\int_F (f(-1)-f(x_i))(f(-1)-f(x_j))\upsilon(df)=\frac{1-x_j}{2}$$

由上式,类似于对 $\int_F \left|f(1)-H_n(f,1)\right|^2 \upsilon(df)$ 的讨论,可得

$$\int_F \left|f(-1)-H_n(f,-1)\right|^2 \upsilon(df)\le\frac{3}{2n}$$

再由引理1得

$$A_2\le\frac{9}{5n} \tag{8}$$

故由(6),(7),(8)及文[3],可得

$$e_2(Q_n,L_2)\cong\frac{1}{\sqrt{n}}$$

(II) 下证(5)式,由 $(a+b)^4\le 8(a^4+b^4)$ 可得

$$e_4^4(Q_n(f,x),G_a)=\int_F\int_{-1}^{1}\left|f(x)-Q_n(f,x)\right|^4 dx\upsilon(df)$$

$$\leqslant 8\int_F\int_{-1}^{1}\left|f(x)-H_n(f,x)\right|^4 dx\upsilon(df)+8\int_F\int_{-1}^{1}\left|Q_n^0(f,x)\right|^4 dx\upsilon(df)$$

$$=C_1+C_2 \tag{9}$$

根据文献[6]的结论可得

$$C_1\cong\frac{1}{n^2} \tag{10}$$

由 $Q_n^0(f,x)$ 的定义知

$$C_2\leqslant\int_{-1}^{1}\frac{T_n^8(x)(1+x)^8}{4}dx\int_F\left|f(1)-H_n(f,1)\right|^4\upsilon(df)$$

$$+\int_{-1}^{1}\frac{T_n^8(x)(1-x)^8}{4}dx\int_F\left|f(-1)-H_n(f,-1)\right|^4\upsilon(df)$$

当 $k_1\le k_2\le k_3\le k_4$ 时,据引理2可得

$$\int_F (f(1)-f(x_{k_1}))(f(1)-f(x_{k_2}))(f(1)-f(x_{k_3}))(f(1)-f(x_{k_4}))\upsilon(df)$$

$$=\frac{(1-x_{k_1})(1-x_{k_2})}{2}+\frac{(1-x_{k_1})(1-x_{k_3})}{4}$$

由上式经整理可得

$$\int_F\left|f(1)-H_n(f,1)\right|^4\upsilon(df)=\int_F\left|\sum_{k=1}^{n}h_k(1)(f(1)-f(x_k))\right|^4\upsilon(df)$$

$$=\tfrac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)^2h_k^4(1)+3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)^2h_k^3(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)+3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)^2h_k^2(1)(\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1))^2$$

$$+\tfrac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k^2(1)\sum_{j=k+1}^{n}(1-x_j)h_j(1)(h_j(1)+2\sum_{s=j+1}^{n}h_s(1))$$

$$+3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}(1-x_j)h_j^3(1)+9\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}(1-x_j)h_j^2(1)\sum_{i=j+1}^{n}h_i(1)$$

$$+3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}(1-x_j)h_j(1)(\sum_{i=j+1}^{n}h_i(1))^2$$

$$+3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)\sum_{i=j+1}^{n}(1-x_i)h_i(1)(h_i(1)+2\sum_{s=i+1}^{n}h_s(1))$$

$$=D_1+D_2+D_3+D_4+D_5+D_6+D_7+D_8$$

下面分别对 $D_1,D_2,D_3,D_4,D_5D_6,D_7,D_8$ 进行估计

$$D_1=\tfrac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)^2\left(\tfrac{1}{n^2(1-x_k)}\right)^2h_k^2(1)\le\tfrac{3}{4n^4},\quad D_2\le\tfrac{3}{n^4}\sum_{k=1}^{n}h_k(1)=\tfrac{3}{n^4},$$

$$D_3\le 3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)^2h_k^2(1)=\tfrac{3}{n^3}$$

$$D_4=\tfrac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k^2(1)\sum_{j=k+1}^{n}(1-x_j)h_j^2(1)+3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k^2(1)\sum_{j=k+1}^{n}(1-x_j)h_j(1)\sum_{s=j+1}^{n}h_s(1)$$

$$\le\tfrac{3}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k^2(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)+3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k^2(1)\sum_{j=k+1}^{n}(1-x_j)h_j(1)\le\frac{3}{2n^4}+\frac{3}{n^3}$$

$$D_5\le\tfrac{3}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)\le\tfrac{3}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)=\tfrac{3}{n^3}$$

$$D_6\le 9\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}(1-x_j)h_j^2(1)\le\tfrac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)=\tfrac{9}{n^3}$$

$$D_7\le 3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}(1-x_j)h_j(1)\le\tfrac{3}{n^2}$$

$$D_8\le 3\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)\sum_{i=j+1}^{n}(1-x_i)h_i^2(1)$$

$$+6\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)\sum_{i=j+1}^{n}(1-x_i)h_i(1)\sum_{s=i+1}^{n}h_s(1)$$

$$\le\tfrac{3}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)+6\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1)\sum_{j=k+1}^{n}h_j(1)\sum_{i=j+1}^{n}(1-x_i)h_i(1)\le\frac{3}{n^3}+\frac{6}{n^2}$$

因此

$$\int_F\left|f(1)-H_n(f,1)\right|^4\upsilon(df)$$

$$\le\frac{3}{4n^4}+\frac{3}{n^4}+\frac{3}{n^3}+\frac{3}{2n^4}+\frac{3}{n^3}+\frac{3}{n^3}+\frac{9}{n^3}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{6}{n^2}\le\frac{141}{4n^2}$$

当 $k_1\le k_2\le k_3\le k_4$ 时,据引理2可得

$$\int_F (f(-1)-f(x_{k_1}))(f(-1)-f(x_{k_2}))(f(-1)-f(x_{k_3}))(f(-1)-f(x_{k_4}))\upsilon(df)$$

$$=\frac{(1+x_{k_2})(1+x_{k_4})}{4}+\frac{(1+x_{k_3})(1+x_{k_4})}{2}$$

由上式,类似于对 $\int_F\left|f(1)-H_n(f,1)\right|^4\upsilon(df)$ 的讨论可得

$$\int_F\left|f(-1)-H_n(f,-1)\right|^4\upsilon(df)\le\frac{141}{4n^2}$$

再由引理1有

$$C_2\le\frac{1645}{6n^2} \tag{11}$$

由(9),(10),(11)及文献[3]可得

$$e_4(Q_n,L_4)\cong\frac{1}{\sqrt{n}}$$

用相同的方法,通过更复杂的计算,我们可以猜出对任意偶数 $p$ 都有

$$e_p(Q_n,L_p)\cong\frac{1}{\sqrt{n}}$$

(下转47页)

显然,根据上述含参变量的广义积分的解,若使参变量取某些特殊值,我们还能确定其对应的实变量的广义积分。

**注释及参考文献:**

[1]张元林. 积分变换(第四版)[M]. 北京:高等教育出版社,2003,5.

[2]白艳萍,雷英杰,扬明. 复变函数与积分变换[M]. 北京:国防工业出版社,2004,8.

[3]华中科技大学数学系. 复变函数与积分变换(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,2003,6.

[4]华东师范大学数学系. 数学分析(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,1991,10.

[5]陈传璋,金福临,胡家赣,等. 数学分析(第二版)[M]. 上海:科学技术出版社,1962,12.

# Solving a Class of Improper Integral with Parameter

QIAN Xue-Ming

*(Wuxi Professional College of Science and Technology, Wuxi ,Jiangsu 214028 )*

**Abstract:** In textbooks of《Analysis》, it usually solves improper integral with parameter through derivation in the presentation of integration and exchanging the order of integral. But those methods seem disabled in some of improper integral with parameter, such as $\int_0^{+\infty}\frac{\cos b\omega}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega$ and so on. This paper will solve the improper integral with parameter above on the methods of Fourier transform, from cut-in sine function、cut-in cosine function and two-sided exponential function. Meanwhile, it gives the result of a class of relating improper integral with parameter.

**Key words:** Improper integral with parameter; Fourier transform; Two-sided exponential function; Cut-in sine function; Cut-in cosine function

(上接40页)

**注释及参考文献:**

[1]J.F.Traub, G.W.Wasilkowski and H.Wozniakowski, Information-Based Complexity[M].New York:Academic Press,1988.

[2]Yongsheng Sun,Chenyong Wang, Average Error Bound of Best Approximation of Continuous Function on the Wiener Space[J].Journal of Complexity,1995,(11):74-104.

[3]Klaus Ritter. Approximation and Optimization on the Wiener Space[J].Journal of Complexity,1990,(6):337-364.

[4]Mark Kon, Leszek Plaskota, Information-based nonlinear approximation: an average case seting[J].Journal of Complexity, 2005, (21):211-229.

[5]A.K.Varma,J.Prasad.An Analogue of a Problem of P.Erdos and E.Feldheim on Convergence of interpolatory Processes[J]. Journal of Approximation Theory,1989(56):225-240.

[6]许贵桥.Lagrange插值和Hermite-Fejer插值在Wiener空间下的平均误差[J].数学学报中文版,2007,50(6).

# The Average Error of a Kind of Modified Hermite-Fejer Interpolation in Wiener Space

CAO Li

*(College of Mathematic Science,Tianjin Normal University,Tianjin 300387)*

**Abstract:** In this paper, we obtain the weakly asymptotic order for the average error of the Egervary -Turan Hermite-Fejer interpolation based on the extended zeros of Tchebycheff polynomials of the first kind in the Wiener space.

**Key words:** Tchebycheff polynomials; Egervary-Turan Hermite-Fejer interpolation polynomials; Wiener space