变换群的广谱分析

王 磊

（华北水利水电学院 数学与信息科学学院，河南 郑州 450011）

【摘 要】本文从变换群出发，揭示了变换的实质是观控方式，并由此探讨了客观性和不变性的内在一致性及其哲学意义。

【关键词】变换；客观存在；等价类

【中图分类号】O152.2 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2007)02-0045-03

变换群理论在几何学和物理学领域都有着广泛的应用，在这方面已取得了许多成果。但变换与观控方式有什么联系呢？在变换群下的不变性是否对应着客观事物的客观性呢？本文主要讨论这方面的内容。

1 变换与观控方式

定义1[1] 集合S到自身的一个映射叫做S的一个变换。

定义2 设 $G=\{\delta: S\rightarrow S \mid \delta$ 是S上的变换$\}$，如果G在复合运算下满足：

（1）恒等变换 $I\in G$

（2）若 $\delta_1\in G$，$\delta_2\in G$，则 $\delta_1\delta_2\in G$

（3）若 $\delta\in G$，则它的逆变换 $\delta^{-1}\in G$

则称G为S的一个变换群。

考察几何图形的变换，设δ是平面上由 $\nu=(a,b)$ 决定的平移，是平面上转角为θ的绕原点的旋转，则变换 $\tau\delta$ 的公式为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \quad (1)$$

对这个变换做出观控方式的理解，即把它看成从一点 $P(x,y)$ 到另一点 $P'(x',y')$ 在同一直角坐标系中的一个操作过程，变换（1）可看成先平移后旋转的运动，即先做一个平移 $\nu=(a,b)$，$\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\end{cases}$ 如图1所示；再做一个绕原点O的转角为θ角的旋转 $\begin{cases}x''=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\y''=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$ 如图2所示。

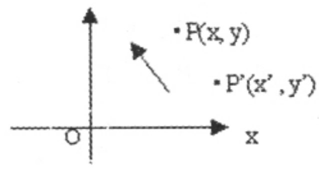


图1

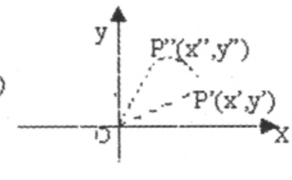


图2

给定一个几何图形，看它在（1）变换下某些几何性质，如两点间的距离、两向量的夹角、图形的面积等的不变性，实际上就是先控后观的操作模式，若做出 $\delta\tau$ 变换，则公式变为：

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

显而易见，它可看作进行先旋转再平移的运动，即观控方式发生了改变。由此推广到平面上的正交变换和仿射变换，它们的公式表示均为

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a\\y'=a_{21}x+a_{22}y+b\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

其中 $A=(a_{ij})$，$\det A\neq 0$

易验证，平面上所有正交变换和仿射变换的集合分别构成平面上的正交变换群和仿射变换群，这里A和a，b即代表一种或几种连续操作方式，如图形的平移、旋转、反射、拉伸、压缩等。

从广谱哲学的角度看，观控是人观察或控制对象事物的一定方式，也就是一定的反映方式，而反映过程就是客观事物在人脑中的一种广义映像，它体

收稿日期：2007-03-29
作者简介：王磊(1980-)，男，河南南阳人，硕士研究生，研究方向：数学哲学。

现了认识论和本体论的统一。因此，若 A 为客观事物集, f 为观控方式，则 $f:\ A\to f(A)$ 体现了主体对客体的观控过程，而 $f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}$ 即是客观事物 a 经变换 f 生成的映像集。广谱哲学的创始人张玉祥在《广谱存在论导引》中指出[2]："变换群就是由若干变换在合成运算下的一种代数结构。由于变换可以看作人的操作方式（观控方式），合成运算不过是接连操作，因此，在变换群的作用下，一种几何或物理性质不变，就是人在确定操作方式下的不变性。"

2 客观性与不变性

上面提到在变换群下，几何性质或物理性质的不变性，如在拓扑空间中，几何图形在被扭曲、拉大、缩小或任意变形等拓扑变换下的不变性。但是，变换群是否对集合进行了分类，而分类又是否构成变换群是我们值得研究的问题，为了更清楚地理解它们之间的联系，先给出以下基本概念和定理：

定义 3[3] 集 S 中的关系 E 叫做等价关系，是指对任意 $a,\ b,\ c\in S$ 满足：(1) $a\ E\ a$ (2) $a\ E\ b\ \Rightarrow\ b\ E\ a$ (3) $a\ E\ b,\ b\ E\ c\ \Rightarrow\ a\ E\ c$，简记为 ~。

定义 4 集 S 的一个分类 $\pi(S)$ 是 S 的幂集 $P(S)$ 的一个子集，它满足：(1) $\Phi\notin\pi(S)$ (2) $\cup\{A\mid A\in\pi(S)\}=S$ (3) $A,B\in\pi(S),\ A\neq B\ \Rightarrow\ A\cap B=\Phi$

定义 5 设 G 是一个群，S 是一个非空集合，如果 $G\times S$ 到 S 有一个映射：$(a,\ \chi)\to a\cdot\chi$ 满足：$(ab)\cdot\chi=a\cdot(b\cdot\chi),\ \forall a,b\in G,\ \forall\chi\in S,\ e\cdot x=x,\ \forall x\in S$ 则称 G 在集合 S 上有一个作用。

定义 6 设群 G 在集合 S 上有一个作用，对于 $x\in s$, $G(\chi)=\{g\cdot\chi\mid g\in G\}$，称是 $G(x)$ 的轨道。

Cayley 定理 任一群必同构于一个变换群。

有了以上定义及定理，我们可以得出如下推论：

推论 1 设 E 是 S 中的等价关系，则 $\pi_E(S)=\{a\mid a\in S\}$ 是由 E 确定的 S 的一个分类，称 $\pi_E(S)$ 为 S 关于等价关系 E 的商集。

推论 2 若在集 S 中规定一个二元关系如下：$x\sim y\Leftrightarrow\exists g\in G$ 使得 $y=g\cdot\chi$，则所有轨道 $G(x)$ 组成的集合给出了 S 的一个分类，并且每一个分类确定唯一的等价关系。

证明：(1) 令 $g=e$，则 $x\sim x\Leftrightarrow e\cdot\chi=\chi$

(2) 由 $x\sim y$ 知 $\exists g\in G$，使得 $g\cdot\chi=y$，即有 $g^{-1}y=\chi(g^{-1}\in G)$，则 $y\sim x$

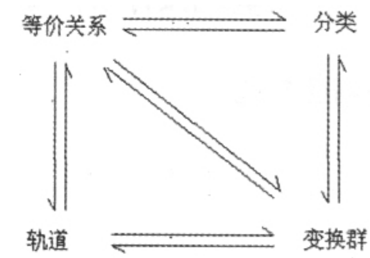
(3) $x\sim y\Leftrightarrow g\cdot\chi=y(\exists g\in G)$，又 $y\sim z\Leftrightarrow g'\cdot y=z(\exists g'\in G)\Rightarrow x\sim z\Leftrightarrow(g'\cdot g)\cdot(\chi)=z(g'g\in G)$

故"~"定义了一个等价关系，也确定了 S 的一个分类。

推论 3 集 S 上的一个分类都对应于集 S 上的变换群。

证明：设 S_1 是集 S 上某一类元素的集合，且 $S_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，进行构造性证明，取两次笛卡尔直集 $S_1^2=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),\cdots,(a_1,a_m),(a_2,a_1),(a_2,a_2),\cdots,(a_2,a_m),(a_3,a_1),\cdots,(a_m,a_m)\}$，易验证 S_1^2 是 S 上的等价关系。在每一对序偶之间建立映射 Φ，则所有映射的集积满足形成群的三个条件，即 $G=\{\varphi:\ a_i\to a_j\mid i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,m\}$ 则 $(G,\cdot)$ 形成 S 上的变换群。证毕。

由以上分析，我们可以得出如下结论：



利用上面所得结论对平面上所有二次曲线进行分类：

设 $S=\{F(X,\ Y)\mid F(X,\ Y)=a_{11}X^2+a_{22}Y^2+2a_{12}XY+2a_{13}X+2a_{23}Y+a_{33}=0\}$

关系 $S'=\{X^2+Y^2=\pm1,\ X^2-Y^2=1,\ X^2\pm Y^2=0,\ Y^2=X,\ Y^2=\pm1,\ Y^2=0\}$

关系 $S''=\{X_1^2+X_2^2\pm X_3^2=0,\ X_1^2\pm X_2^2=0,\ X_1^2=0\}$

建立映射 $\phi:\ s\to s'$, $\varphi:\ s\to s''$，则在仿射变换 ϕ 的作用下，任一二次曲线都等价于 s' 中 9 种最简方程表示曲线之一。在射影变换 φ 作用下，任一二次曲线都等价于 s'' 中 5 种最简方程表示曲线之一。仿射变换保持面积之比不变，射影变换则保持共线四点之比不变。

从广谱分析的角度，我们能够更深刻的认识到上述关系图所体现的哲学意义。按照广谱存在论关于客观存在的定义，根据可映像公理和等价性公理，若有 n 个独立的观察者或有 n 次独立的可控观察，对一个对象物获得等价的映像，则称该对象物为客观存在，该对象物的属性为客观性[4]。

此定义给了我们判断客观性的标准，客观性就是在一定观控方式下事物的不变性，当观控方式改

变时，即从一种观控方式转变为另一种观控方式时，人们可以获得不同的客观性。比如，从不同的角度看三角形内角和定理，会有不同的认识三角形内角和可以等于、大于或小于 180°，我们在不同的参照系下得到不同的客观属性。当选定观控方式后，客观性具有绝对性、不变性，即多重观控作用下的等价性 当观控方式改变，一种客观性将变成另一种客观性，客观性又具有相对性。例如，在伽利略变换下，物体运动的时空间隔、质量及经典力学规律不变，这反映了在宏观低速条件下物质相应特性的绝对性，但在洛伦兹变换下，物体的时空间隔、质量又是可变的，这反映了物质高速运动的情况下相应特性的相对性。

通过以上分析，我们可以看到广谱分析对变换群不变性的深层次挖掘，随着研究的深入，相信会得到更多有用的结论。

参考文献：

[1]廖华奎，王宝富．解析几何教程[M]．北京 科学出版社，2000.

[2]张玉祥．广谱存在论导引[M]．香港 天马出版有限公司，2004.

[3]盛德成．抽象代数[M]．北京 科学出版社，2001.

[4]张玉祥．广谱哲学简明读本[M]．华北水利水电学院广谱哲学研究所，2004.

Broadspectrum Analysis of Transformation Group

WANG Lei

(The College of Maths and Information Science, North China University of Water Conservancy and Electric Power, Zhengzhou, Henan 450011)

Abstract: Through transformation group，the paper proves that the essential of transformation is observocontrol mode. Furthermore the relation between objectivity and invariance has been showed, and the value of philosophy has been discussed.

Key words: Transformation; Objective relation; Equivalent class.

(责任编辑 张荣萍)