D－度量空间的公共不动点定理

隆建军[1]，辛邦颖[2]

(1. 攀枝花市大河中学，四川 攀枝花 617061；2. 西昌学院 数理系，四川 西昌 615022)

【摘 要】给出一般 D－度量空间 2 个自映射的公共不动点定理，所得结论推广了现有文献中的主要结果。

【关键词】D－度量空间；公共不动点；自映射

【中图分类号】O177　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2007)01-0027-03

1 引言及定义

尚增科[1]给出了 D－度量空间上的如下不动点定理：

定理 1 设是有界完备 D－度量空间，$T: X\to X$，若对 $\chi, y, z\in X$

$$D(T\chi, Ty, Tz)\leqslant q\max E_D \qquad (1)$$

其中 $0\leqslant q<1$，E_D 是集合 $D=\{D(\chi, y, Tz), D(\chi, Ty, z), D(T\chi, y, z), D(\chi, Ty, Tz), D(T\chi, y, z), D(\chi, Ty, Tz), D(T\chi, Ty, z)\}$ 的任一非零子集，则 T 存在唯一不动点 $p\in X$，且 T 在 p 点处连续。

本文拟在此基础上讨论完备 D－度量空间 X 上 2 个自映射 T 和 S 的公共不动点的存在性。

定义 1 对于一般 D－度量空间 X 上 2 个自映射 T 和 S，如果 $\forall \chi\in X$，有 $TS\chi=ST\chi$，则称 T 与 S 可交换。

2 主要结论及其证明

定理 2，设 X 是有界完备 D－度量空间，T 和 S 是到自身的可交换映射，$TX\subset SX$，S 是连续的，$\chi, y, z\in X$，有 $D(T\chi, Ty, Tz)\leqslant q\max\{D(S\chi, Sy, Sz), D(S\chi, Sy, Tz), D(S\chi, Ty, Sz), D(T\chi, Sy, Sz), D(S\chi, Ty, Tz), D(T\chi, Sy, Tz), D(T\chi, Ty, Sz)\}$ 其中 $0\leqslant q<1$，则 T 和 S 在 X 上存在唯一公共不动点 $S\xi$，且 T 在 $S\xi$ 处连续。

证明：$\forall \chi_0\in X$，由于 $TX\subset SX$，所以 $\exists \chi_1\in X$ 使 $T\chi_0=S\chi_1$，对 $\chi_1\in X$，$\exists \chi_2\in X$ 使 $T\chi_1=S\chi_2$，一般地可以归纳定义一个点列 $\{\chi\}\subset X$，使 $T\chi_n=S\chi_{n+1}(n=0, 1, 2, L)$。

下面分四步给出定理的证明：

1）证明 $\{T\chi_n\}$ 是 D－Cauchy 列，由（2）式有 $D(T\chi_n, T\chi_{n+1}, T\chi_{n+p})\leqslant q\max\{D(S\chi_n, S\chi_{n+1}, S\chi_{n+p}), D(S\chi_n, S\chi_{n+1}, T\chi_{n+p}), D(S\chi_n, T\chi_{n+1}, S\chi_{n+p}), D(S\chi_n, S\chi_{n+1}, S\chi_{n+p}), D(T\chi_n, S\chi_{n+1}, S\chi_{n+p}), D(S\chi_n, T\chi_{n+1}, T\chi_{n+p}), D(T\chi_n, S\chi_{n+1}, T\chi_{n+p}), D(T\chi_n, T\chi_{n+1}, S\chi_{n+p})\}$

$=q\max\{D(T\chi_{n-1}, T\chi_n, T\chi_{n+p-1}), D(T\chi_{n-1}, T\chi_n, T\chi_{n+p}), D(T\chi_{n-1}, T\chi_{n+1}, T\chi_{n+p-1}), D(T\chi_n, T\chi_n, T\chi_{n+p-1}), D(T\chi_{n-1}, T\chi_{n+1}, T\chi_{n+p}), D(T\chi_n, T\chi_n, T\chi_{n+p}), D(T\chi_n, T\chi_{n+1}, T\chi_{n+p-1})\}$

$$\leqslant q\max\{D(T\chi_a, T\chi_b, T\chi_c)\} \qquad (3)$$

其中 $n-1\leqslant a\leqslant n, n\leqslant b\leqslant n+1, n+p-1\leqslant c\leqslant n+p, a, b, c\in N, 1<p\in N$。对（3）式右边每一项分别作估计，有 $D(T\chi_{n-1}, T\chi_n, T\chi_{n+p-1})\leqslant q\max\{D(T\chi_{n-2}, T\chi_{n-1}, T\chi_{n+p-1}), D(T\chi_{n-2}, T\chi_{n-1}, T\chi_{n+p-1}), D(T\chi_{n-2}, T\chi_n, T\chi_{n+p-2}), D(T\chi_{n-1}, T\chi_{n-1}, T\chi_{n+p-2}), D(T\chi_{n-2}, T\chi_n, T\chi_{n+p-1}), D(T\chi_{n-1}, T\chi_{n-1}, T\chi_{n+p-1}), D(T\chi_{n-1}, T\chi_n, T\chi_{n+p-2})\}$ （4）

$D(T\chi_{n-1}, T\chi_n, T\chi_{n+p})$

收稿日期：2006－12－30

作者简介：隆建军（1981－　），男，四川安岳人，主要从事数学教学。

$\leqslant q\max\{D(T\chi_{n-2},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n},T\chi_{n+p}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1})\}$ (5)

$D(T\chi_{n-1},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p-1})$

$\leqslant q\max\{D(T\chi_{n-2},T\chi_{n},T\chi_{n+p-2}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p-2}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-2}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p-2})\}$ (6)

$D(T\chi_{n},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1})$

$\leqslant q\max\{D(T\chi_{n-1},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-2}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n},T\chi_{n+p-2}),D(T\chi_{n},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-2}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n},T\chi_{n},T\chi_{n+p-2})\}$ (7)

$D(T\chi_{n-1},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p})$

$\leqslant q\max\{D(T\chi_{n-2},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n},T\chi_{n+p}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-2},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n},T\chi_{n+p}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p-1})\}$ (8)

$D(T\chi_{n},T\chi_{n},T\chi_{n+p})$

$\leqslant q\max\{D(T\chi_{n-1},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n},T\chi_{n-1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n},T\chi_{n+p}),D(T\chi_{n},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p}),D(T\chi_{n},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1})\}$ (9)

$D(T\chi_{n},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p-1})$

$\leqslant q\max\{D(T\chi_{n-1},T\chi_{n},T\chi_{n+p-2}),D(T\chi_{n},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n-1},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n},T\chi_{n},T\chi_{n+p-1}),D(T\chi_{n},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p-2})\}$ (10)

将(4)~(10)式替换(3)式右端，得

$D(T\chi_{n},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p})\leqslant q^{2}\max\{D(T\chi_{\alpha},Ty_{\beta},Tz_{\gamma})\}$。

其中 $n-2\leqslant\alpha\leqslant n$，$n-1\leqslant\beta\leqslant n+1$，$n+p-2\leqslant\gamma\leqslant n+p$，$\alpha,\beta,\gamma\in N$，将此过程继续下去，有 $D(T\chi_{n},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p})\leqslant q^{n}\max\{D(T\chi_{\alpha},Ty_{\beta},Tz_{\gamma})\}$ (11)

由于 X 是有界完备 D－度量空间，设 $M=\sup\limits_{\chi,y,z\in X}\{D(\chi,y,z)\}$，则 $0\leqslant M\leqslant+\infty$

由(11)式有 $D(T\chi_{n},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p})\leqslant q^{n}M$ (12)

由(12)式及 $D(\chi,y,z)$ 的性质[2]得

$$D(T\chi_{n},T\chi_{n+1},T\chi_{n+p})\leqslant\frac{2Mq^{n}}{1-q}\rightarrow0(n\rightarrow\infty)$$

由此 $\{T\chi_{n}\}$ 是 D－Cauchy 列，由 X 是有界完备 D－度量空间，所以 $\exists\xi\in X$ 使

$T\chi_{n}\rightarrow\xi(n\rightarrow\infty)$，从而 $S\chi_{n}\rightarrow\xi(n\rightarrow\infty)$。

由 S 的连续性得 $ST\chi_{n}\rightarrow S\xi$，$S^{2}\chi_{n}\rightarrow S\xi(n\rightarrow\infty)$。

2)证 $S\xi=T\xi$，由(1)式有 $D(TS\chi_{n},TS\chi_{n+1},T\xi)$

$\leqslant q\max\{D(S^{2}\chi_{n-1},S^{2}\chi_{n},S\xi),D(S^{2}\chi_{n-1},TS\chi_{n},T\xi),D(TS\chi_{n-1},S^{2}\chi_{n+1},S\xi),D(S^{2}\chi_{n},TS\chi_{n},S\xi),D(TS\chi_{n},S^{2}\chi_{n+1},T\xi),D(S^{2}\chi_{n},S^{2}\chi_{n+1},T\xi),D(TS\chi_{n},TS\chi_{n+1},T\xi)\}$

令 $n\rightarrow\infty$，由 D 的连续性[2]及定义 1，并化简，得

$D(S\xi,S\xi,T\xi)\leqslant q\max\{0,D(S\xi,S\xi,T\xi)\}=qD(S\xi,S\xi,T\xi)$

由于 $0\leqslant q<1$，因此 $D(S\xi,S\xi,T\xi)=0$，从而 $S\xi=T\xi$。

3)下证 $S\xi$ 是 T 和 S 的唯一公共不动点。

由定义 1 知：T 和 S 可交换，所以 $ST\xi=TS\xi$，且 $S^{2}\xi=S(S\xi)=ST\xi$，由(1)并化简得

$D(TS\xi,S\xi,S\xi)=D(TS\xi,T\xi,T\xi)\leqslant qD(TS\xi,S\xi,S\xi)$

由于 $0\leqslant q<1$，因此 $D(TS\xi,S\xi,S\xi)=0$，从而 $TS\xi=S\xi$，又 $S^{2}\xi='S(S\xi)=ST\xi=S\xi$。

即 $S\xi$ 是 T 和 S 的一个公共不动点。

假设 T 和 S 有 2 个公共不动点：p，w。则由(1)有

$D(p,w,p)=D(Tp,Tw,Tp)\leqslant q\max\{D(Sp,Sw,Sp),D(Sp,Sw,Sp),D(Sp,Tw,Sp),D(Tp,Sw,Sp),D(Sp,Tw,Tp),D(Sp,Sw,Tp),D(Tp,Tw,Sp)\}=qD(p,w,p)$

由 $0\leqslant q<1$，故 $D(p, w, p)=0$，从而 $p=w$。

所以 $S\xi$ 是 T 和 S 的唯一公共不动点。

4）证 T 在 $S\xi$ 处连续，设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=S\xi$，$\{y_n\}\subset X$，$(n=1, 2, 3, L)$，由 S 的连续性知 $\lim\limits_{n\to\infty} Sy_n=S^2\xi$，由 T 和 S 可交换有 $TS\xi=ST\xi=S(S\xi)=S^2\xi$，由（1）式有

$$D(TS\xi, Ty_n, TS\xi)\leqslant q\max\{D(Sy_n, S^2\xi, S^2\xi), D(Sy_n, TS\xi, TS\xi), D(Sy_n, TS\xi, TS^2\xi), D(Ty_n, TS\xi, TS\xi), D(Sy_n, S^2\xi, TS\xi), D(Ty_n, TS\xi, TS\xi), D(Ty_n, TS\xi, TS\xi)\} \quad (3)$$

对（3）式两边取 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Sup}$ 运算得

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Sup}D(TS\xi, Ty_n, TS\xi)\leqslant q\max\{0, \lim_{n\to\infty}\operatorname{Sup}D(TS\xi, Ty_n, TS\xi)\}=q\lim_{n\to\infty}\operatorname{Sup}D(TS\xi, Ty_n, TS\xi)$$

由 $0\leqslant q<1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Sup}D(TS\xi, Ty_n, TS\xi)=0$。

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} D(TS\xi, Ty_n, TS\xi)=0$，由 D 的连续性知

$\lim\limits_{n\to\infty} Ty_n=TS\xi=T\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，于是 T 在 $S\xi$ 处连续。定理证毕。

注 在定理 2 中取 S 为恒等映射，便可得定理 1，从而定理 2 是定理 1 的推广。

参考文献：

[1]尚增科. D－度量空间一组不动点定理[J]. 宝鸡文理学院学报（自然科学版），2000，20（2）：98－99, 149.

[2]马玲. D－度量空间的一个不动点定理[J]. 宝鸡文理学院学报（自然科学版），1998，18（1）：15－17.

A Common Fixed Point Theorem for D－mtric Spaces

LONG Jian－jun[1]，XIN Bang－ying[2]

(1. Dahe Middle School of Panzhihua, Panzhihua, Sichuan 617061;

2. Department of Mathematics and Physics Xichang College, Xichang, Sichuan 615022)

Abstract: A common fixed point theory for two mappings in ingeneralized D－mtric spaces is given，which extends the known results.

Key words: D－mtric spaces; Common fixed point; Self mapping

（责任编辑 张荣萍）

（上接 26 页）

for the experiment skill and the profession base to the student. To advent the quality of the experiment teaching, we must renew the content of the experiment teaching. we must improve the condition of the experiment teaching. we must reform the mode of the experiment teaching, too. This text will be conclude and define for the reason and the first practice of the course reform.

Key words: Experimeng; Teaching; Reform; Thinking; Practice

（责任编辑 张荣萍）