# 浅谈极限教学

李世光

(西昌学院 预科部, 四川 西昌 615013)

【摘 要】极限是微积分学中一个重要概念,是学习微积分的基础。由于极限定义的逻辑结构相当复杂,概念抽象,难理解,是教学难点。本文根据多年的教学实践提出从实例出发得出极限描述性定义,再过渡到精确定义,最后是几何解释的教学方法,从而达到分散教学难点,提高教学质量的目的。

【关键词】极限;定义;教学

【中图分类号】O171-42 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2006)03-0145-03

## 1 极限概念的"ε—N"定义

极限概念是微积分学的基础，在一段时间内没有严格的定义，直到十九世纪法国数学家柯西和德国数学家魏尔特拉斯才对极限概念提出了严格定义,即"ε—N"定义。

数列极限的概念，设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 是无穷数列。如果存在一个数 A,使得对任意的正数 $\varepsilon>0$,总有 $N>0$,使 $n\geqslant N$ 时总有 $|a_n-A|<\varepsilon$,就说,当 n 趋近于正无穷时,数列 $a_n$ 的极限为 A。

记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$

这个定义中,用了"ε"这个希腊字母,所以叫做"ε—N"定义或"ε—语言"。用这个定义讲述极限概念,可以表达得十分严格,可以说清什么是无穷小,什么是极限。但是定义的逻辑结构复杂，用数理逻辑表示为:

"$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$" = df

"$(\exists A)(\forall\varepsilon>0)(\exists N>0)(\forall n\geqslant N(|a_n-A|<\varepsilon)$"①

这里包含了4个逻辑层次,是学生从没有遇到过的逻辑结构如此复杂的定义。一百多年来,这个定义始终占据着微积分的讲堂,要学习和掌握微积分,就必须学习极限,学习极限就必须通过"ε—语言"这一难关。但这一难关让一般理工学生都望而生畏,而文科类、经济类、预科类学生更难理解,教学难度太大。如何处理这个难点呢?下面根据教学实践,谈一谈极限概念教学。

## 2 极限概念教学

### 2.1 数列极限的概念

先考察无穷数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{n}$ ,…的变化趋势。当 n 无限增大时,数列的通项 $\frac{1}{n}$ 随着 n 的增大无限地趋近于常数零。

又如数列 $0.9, 0.99, 0.999, \cdots, 1-\frac{1}{10^n}, \cdots$,当 n 无限增大时,通项 $1-\frac{1}{10^n}$ 无限趋近于常数 1。

上述两个数列的变化具有如下特征:

(1)变化过程是无限的,项数是无限的。

(2)变化过程中,随着 n 的增加,数列中的项趋近于一个确定值(0 和 1),这个确定值对数列的变化起着限制作用,是数列变化的极点。

以上两个特征的确立，容易得出无穷数列极限的描述性定义。

如果数列 $\{a_n\}$,当 n 无限增大时,数列的项 $a_n$ 无限趋近常数 A,则称数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限。

记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$

描述性定义直观、易懂，但定义中的"无限增大","无限趋近"意义不明确。n 无限增大是指 n 充分地大，$a_n$ 无限趋近于常数 A 是指 $|a_n-A|$ 可以任意小。即对给定的任意小的正数 ε 总能在数列中找到一项 $a_n$，使得这项以后的所有项与 A 的差的绝对值都小于 ε，也就是说，对给定的正数 ε，能找到 N,使 $n>N$ 时,有不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立。从而得出数列极限的精确定义。

收稿日期:2006-04-17

作者简介:李世光(1956- )、男、讲师.主要从事高等数学的教学与研究。

设有数列$\{a_n\}$与常数 A,对于任意给定的正数 $\varepsilon$,总存在相应的正整数 N,使得当 n>N 时的一切 $a_n$ 都满足不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$,则称 A 为数列$\{a_n\}$的极限。记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 或 $a_n \to A(n\to\infty)$

上述定义中,$\varepsilon$ 的任意性确保了 $a_n$ 与 A 的无限接近,任意给定 $\varepsilon$ 可以确定相应的 N,一般地,$\varepsilon$ 越小 N 越大。若将 $|a_n - A| < \varepsilon$ 写成 $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$,将满足不等式的项在数轴上表示出来,则这些项在数轴上对应的点都落在开区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$内,当 $\varepsilon$ 很小时,区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$也很小,可以非常直观地看出从第 N 项以后的所有项 $a_n$ 与 A 的无限接近程度。如图 1 所示。

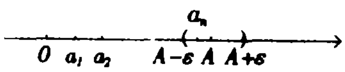


图 1

在教学中,通过实例得到描述性定义,再过渡到精确定义,最后是几何解释几个步骤。使学生对极限定义认识既有直观性又有严密性,从而达到分散难点,得到较好教学效果的目的。

### 2.2 自变量趋近于无穷大时函数的极限

数列是一种特殊的函数,数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 和函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$,当 $n\to+\infty$ 和 $x\to+\infty$ 时的图形的变化趋势是一样的。(如图 2,图 3)只不过在变化过程中,n 只取正整数,且离散地增大。而 x 可以取任何正实数,且连续地增大。

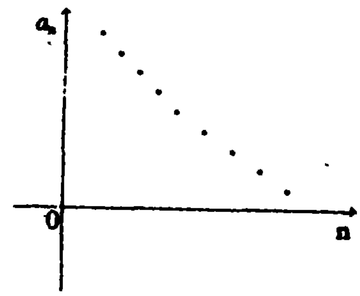


图 2

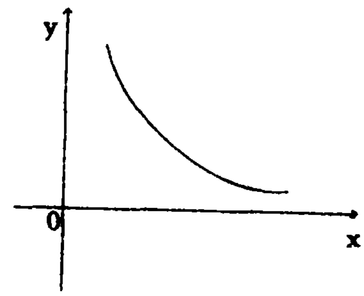


图 3

事实上,当自变量 x 趋近于无穷大时函数的极限概念可仿照数列极限的概念,于是有函数极限的描述性定义和精确定义,如表 1。

表 1

| 名称与记号 | 例子 | 直观描述 | 精确定义 |
|---|---|---|---|
| f(x)在正无穷远处极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$ | 当 x 无限增大时 $f(\chi)$无限趋近于 A | $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$ 使得 $x>M$ 时, $\lvert f(\chi)-A\rvert<\varepsilon$ 恒成立 |
| f(x)在负无穷远处极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$ | 当 x 无限减少时 $f(\chi)$无限趋近于 A | $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$ 使得 $x<-M$ 时, $\lvert f(\chi)-A\rvert<\varepsilon$ 恒成立 |
| f(x)在无穷远处极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$ | 当$\lvert x\rvert$无限增大时 $f(\chi)$无限趋近于 A | $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$ 使得 $\lvert x\rvert>M$ 时, $\lvert f(\chi)-A\rvert<\varepsilon$ 恒成立 |

### 2.3 自变量 x 趋近于有限值时函数的极限

在学生对极限概念有一定的认识后,可通过实例来考察自变量趋于有限值 a 时,函数 f(x) 的变化趋势。

设:函数 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$,讨论当 $x\to2$ 时,f(x)的变化趋势。见表 2。

表 2

| x | … | 1.99 | 1.999 | 1.9999 | …→2←… | 2.0001 | 2.001 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | … | 3.99 | 3.999 | 3.9999 | …→4←… | 4.0001 | 4.001 | … |

从表中可以看出,不论 x 是从小于 2 或是大于 2 的方向趋近于 2 时,f(x)都趋近于常数 4,即是当 x 无限趋近 2 时,f(x)以 4 为极限。记为 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$。

将"x 无限趋近于 a","f(x)无限趋近于 A"量化,可得到 f(x)当 x→a 时极限的精确定义及左右极限的定义,见表 3。

表 3

| 名称与记号 | 例子 | 直观描述 | 精确定义 |
|---|---|---|---|
| f(x)在点 a 的左极限 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$ | $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$ | 当 x 无限趋近于 a 且 x <a 时, f(x)无限趋近于 A | $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $a-\delta<x<a$ 时, 有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 恒成立 |
| f(x)在点 a 的右极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$ | $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$ | 当 x 无限趋近于 a 且 x> a 时, f(x)无限趋近于 A | $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $a<x<a+\delta$ 时, 有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 恒成立 |
| f(x)在点 a 的极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ | $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$ | $\lvert x-a\rvert$充分小时, f(x)无限趋近于 A | $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $\lvert x-a\rvert<\delta$ 时, 有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 恒成立 |

从表中可以看出,当 X→a 时,f(x) 的极限存在的充分必要条件是 f(x)在点 a 的左右极限存在且相等,即 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$。

## 3 结论

极限概念是微积分学中一个重要的概念,是学习微积分学的基础,要掌握微积分,就必须通过极限概念的"ε—语言"这一难关。在教学中如何处理这一难点,方法较多。一是不讲极限定义,只要求学生会求极限。二是不惜花费大量学时,让学生学好严格的极限理论,打好数学基础;三是让学生学习极限的描述性定义及运算法则以及求微分求积分的方法,然后再补讲极限理论。这些方法都各有利弊。本文提出的方法既有直观性,学生易懂易学,又有严密性。适用于理科类、经济类、文科类及预科类学生的教学,且都能收到很好的教学效果。

**参考文献:**

①"df ="读作"定义为";"∃"读作"存在";"∀"读作"任意的"。

# On the Teaching of Limit

LI Shi – guang

*(Preparatory Department of Xichang College, Xichang Sichuan 615013)*

**Abstract:** The concept of limit, which is the foundation of learning calculus, plays an important role in differential and integral calculus. Being a difficult point in teaching, the complicated logical structure often makes the detion of limit too nonrepresentational for the students to understand. On the basis of years of teaching practice, this paper brings it forward that we, according to the following procedure, can get betel result in our teaching: firstly, give a descriptive definition by analyzing examples, then present a accmate one and last a geometrical interpretation, step by step, splitting and reducing the difficulty.

**Key words:** Limit; Definition; Teaching

(责任编辑: 张荣萍)