几种碰撞时间计算公式的推导

郑焕武

（西昌学院 数理系，四川 西昌 615022）

【摘　要】本文是继《碰撞时间的定量计算》一文之后，再对斜碰撞、定点碰撞和非球形物体碰撞时间的计算问题作出讨论，并给出相应的时间计算公式。

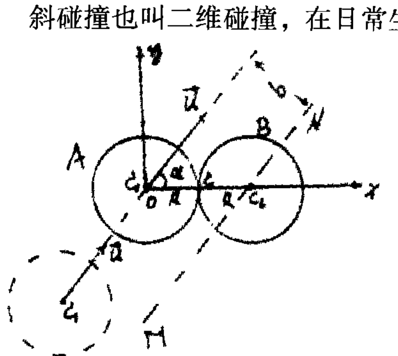
【关键词】斜碰撞；定点碰撞；碰撞时间计算

【中图分类号】O313.4　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2006)02-0034-05

碰撞时间的定量计算是人们期待解决，而又至今尚未完全解决的问题，主要原因是人们在对碰撞问题的研究中，始终采用的是一种力学问题十分复杂的弹性力学方法，而忽略了另一种较为简单的经典力学方法。事实上，在碰撞过程中相碰物体在碰撞力作用下的变化，既有形态方面的变化，又有运动状态方面的变化，因此，碰撞时间既是相碰物体形态变化的持续过程，又是相碰物体运动状态变化的持续过程。显然这两个过程的时间是相等的。既然物体状态变化的两种过程都是同一个时间，那么，在确定碰撞时间的计算问题上，就可以任选其中一种，事实证明，应用经典力学方法来确定碰撞时间的计算问题是可行的。笔者在 2001 年《四川师范大学学报》第 3 期上发表《碰撞时间的定量计算》一文的基础上，再给出几种碰撞模型的时间计算公式。

一、斜碰撞时间的定量计算

斜碰撞也叫二维碰撞，在日常生活与生产劳动中非常普遍。为了使碰撞前后两球的速度都在同一水平面内，我们只讨论运动球与静止球相碰的模型。设有 A、B 两球，其质量相等，同为 m，大小相同，半径为 R。碰撞前 B 球静止，A 球则以速度 $\vec{u}$ 和 B 球发生非对心完全弹性碰撞。由于碰撞在平面内进行，故选取平面直角坐标系 oxy，原点设在两球刚接触时 A 球质心 C_1 所在的位置，x 轴沿两球刚接触时的联心线，并由 C_1 指向 B 球质心 C_2。x 方向就是两球接触面的法线方向，y 方向是切线方向，设 $\vec{u}$ 与 x 轴的夹角为，α 定义为瞄准角，如图示。则刚接触时刻 A 球的质心速度可分解为法向速度和切向速度，即



A 球对 B 球的斜碰撞

$$\begin{cases} u_x = u\cos\alpha \\ u_y = u\sin\alpha \end{cases} \quad (1)$$

设两球表面光滑，沿切线方向碰撞力为零。故 A 球对 B 球的斜碰撞就简化成 A 球以法向速度 $u_x = u\cos\alpha$ 和静止 B 球作沿 x 轴的对心碰撞问题。由于两球质量相等，到碰撞结束时两球速度的改变量都是 $u\cos\alpha$，即

$$\begin{cases} \Delta\nu_1 = 0 - u\cos\alpha = -u\cos\alpha \\ \Delta\nu_2 = u\cos\alpha - 0 = u\cos\alpha \end{cases} \quad (2)$$

再看碰撞过程中 A 球的质心位移，由于 A 球质心既要沿 x 方向作减速直线运动，又要沿 y 方向作匀速直线运动，因此到碰撞结束时 C_1 不能到达碰撞前 C_2 所在的位置。即 C_1 在碰撞过程中沿 x 轴移动的距离不再是刚接触时两球的质心距离 2R。因此，要确定斜碰撞时间，关键是确定两球或系统质心在碰撞过程中移动的距离。为此，在图中画出碰撞参数 b，它表示碰撞前 A 球速度 $\vec{u}$ 对 B 球的瞄准程度，其值为 $b = 2R\sin\alpha$。因为 $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$，故 b 的取值范围是 $0 \leqslant b \leqslant 2R$。由 b 的定义和取值范围容易看出，当

收稿日期：2006－03－27

作者简介：郑焕武（1941－　），男，副教授，主要从事物理学的教学与研究。

b = 0 时，α = 0，则 $u_x = u$，两球作沿 x 轴的对心碰撞，这时 C_1 在碰撞过程中移动了 2R；当 b = 2R 时，$\alpha = \frac{\pi}{2}$ 则 $u_x = 0$，此时两球不发生碰撞，C_1 沿 x 轴方向的位移为零，而当 0 <b <2R 时，有，0 <2 $<\frac{\pi}{2}$，0 $<u_x$ <u 在此范围内，两球的碰撞均为斜碰撞，并有 C_1 在斜碰撞过程中移动的距离 S 为 0 <S <2R，其值由 b 值定。由以上分析看出，碰撞参数 b 和 C_1 的位移 S 的最小值都是零，最大值都是 2R。但是它们由小到大的变化过程正好相反，即当 b 由零增大到 2R 时，S 则同时由 2R 减小到零，反之亦然。故有 S = 2R - b 成立。将 b = 2Rsinα 代入上式有

$$S = 2R(1 - \sin\alpha) \quad (3)$$

这就是 A 球质心 C_1 沿 x 轴移动的距离。

由于是完全弹性碰撞，到碰撞结束时两球质心 C_1 和 C_2 以及系统质心 C 之间的距离又恢复到两球刚接触时的距离，表明它们在碰撞过程中移动了相同的距离，故有系统质心 C 的位移 S_C 为

$$S_C = S = 2R(1 - \sin\alpha) \quad (4)$$

另外，对系统而言碰撞力是内力，不会改变系统质心的运动状态，即 C 是作匀速直线运动，其速度值为

$$u_c = \frac{1}{2}u_x = \frac{1}{2}u\cos\alpha \quad (5)$$

由（4）式和（5）式求出两球作完全弹性斜碰撞的时间计算公式为

$$t = \frac{s_c}{u_c} = \frac{4R(1-tin\alpha)}{u\cos\alpha} \quad (6)$$

可见斜碰撞时间不仅与速度 u 和半径 R 有关，而且还与瞄准角有关，当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，时间不存在，表明不发生碰撞，当 α = 0 时，$t = \frac{4R}{u}$，为 A 球对静止 B 球作完全弹性正碰撞时间。

如果两球的半径不相等，分别为 R_1 和 R_2，则 (6)式变为

$$t` = \frac{2(R_1+R_2)(1-lis\alpha)}{u\cos\alpha} \quad (7)$$

如果两球的碰撞为非完全弹性碰撞，则 A 球质心 C1 到碰撞结束时的速度为

$$v_{1e} = u_x - \frac{(1+e)u_x}{2} = \frac{(1-e)u\cos\alpha}{2}$$

e 为恢复系数。由上式求得 C_1 在碰撞过程中的速度增量为

$$\Delta v_{1e} = v_{1e} - u_x = -\frac{1+e}{2}u\cos\alpha \quad (8)$$

由（2）式和（8）式看出，在完全弹性碰撞和非完全弹性碰撞中，同一个施碰球 A 的速度变化量不相等，故在碰撞力恒定的情况下，速度变化量的大小表明持续时间的长短，并且两速度变化量之比就是两种碰撞时间之比，即

$$\frac{t_e}{t} = \frac{\Delta v_{1e}}{\Delta v_1} = \frac{1+e}{2}$$

由此得出非完全弹性斜碰撞的时间计算公式的

$$t_e = \frac{2(1+e)R(1-lis\alpha)}{u\cos\alpha} \quad (9)$$

$$\text{或} t`_e = \frac{(1+e)(R_1+R_2)(1-lis\alpha)}{u\cos\alpha}$$

二、定点碰撞时间的定量计算

所谓定点碰撞是指碰撞时系统质心位置不发生变化，整个碰撞过程都在同一个点上进行的碰撞。仍以两球的碰撞为例，设施碰球 A 的质量为 m_1，半径为 R_1，碰撞前的速度为 $\vec{u_1}$，受碰球 B 的质量为 m_2，半径为 R_2，碰撞前的速度为 $\vec{u_2}$，故有系统的质心速度为

$$V_C = \frac{m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2}}{m_1+m_2} \quad (10)$$

只要上式为零的碰撞都是定点碰撞。而 $V_c = 0$ 有两种可能，一是 $m_1 = m_2$，并 $u_2 = -u_1$，有 $m_1u_1 + m_2\vec{u_2} = 0$；二是 $m_2 \gg m_1$，且 $u_2 = 0$。我们先讨论第二种情况。

当 A 球以速度 u 和静止 B 球作非完全弹性对心碰撞时，由动量守恒定律和碰撞中的牛顿公式求得施碰球 A 的质心末速度为

$$v_e = u - \frac{(1+e)m_2u}{m_1+m_2} \quad (11)$$

由此求出 A 球质心在碰撞过程中满足的动量定理为

$$Ft_e = m_1(v_e - u) = -\frac{(1+e)m_1m_2u}{m_1+m_2} \quad (12)$$

即 A 球所受冲量与 m2 有关，当 $m_2 = m_1$ 时，A 球所受冲量为

$$Ft_e = -\frac{(1+e)m_1u}{2} \quad (13)$$

当 $m_2 \gg m_1$ 时，两球的碰撞为定点碰撞，此时 A 球受到的冲量为 $F`t`_e = -(1+e)m_1u \quad (14)$

比较(13)式和(14)式有

$$F`t_e` = 2Ft_e \quad (15)$$

式中 $F`$ 和 $t_e`$ 是A球与B球作定点碰撞时，A球受到的冲力和碰撞时间；F和te是A球与等质量B球作移动碰撞时，A球受到的冲力和碰撞时间，并 t_e 可直接由(9)式在 $\alpha=0$ 时求得为

$$t_e=\frac{2(1+e)R}{u} \quad (16)$$

故要从(15)式中求出 $t_e`$，关键是要找到 $F`$ 与F的关系。为此，把(12)式中 t_e 移到右边，并令 $\alpha_0=\frac{u}{t_e}$，而F用牛顿定律表示成 $F=m_1\alpha$，两边消去 m_1 得

$$a=-\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}a_0 \quad (17)$$

式中α为A球与另一质量不等的静止球碰撞时的质心加速度，它不仅与 α_0 有关，而且与两球的质量有关。α_0 一定时，m_2 越大，α也越大，表明A球受到的阻力越大，当 $m_2 \gg m_1$ 时，有

$$a`=-(1+e)a_0 \quad (18)$$

α\` 为A球与另一质量很大的静止球作定点碰撞时A球的质心加速度。另外，当 $m_2=m_1$ 时，(17)式中的加速度为

$$a``=-\frac{1+e}{2}a_0 \quad (19)$$

α\`\` 为A球与另一质量相等的静止球碰撞时A球的质心加速度。由(18)式和(19)式得出 $\alpha`=2\alpha``x$，两边同乘 m_1 并应用牛顿第二定律有

$$F`=2F$$

代入(15)式，并注意到(16)式，求得非完全弹性定点正碰撞时间与非完全弹性移动正碰撞时间相等。

$$t`_e=t_e=\frac{2(1+e)R}{u} \quad (20)$$

式中R与u为施碰球的半径和初速度，e为两球的恢复系数。

由于定点碰撞时间只与施碰球的大小和初速度有关，而与受碰球的半径无关。因此，受碰球可以换成其他任意形状的非球形物体，只要该物体的质量比施碰球的质量大很多，并处于静止即可，如地面，墙壁等。

如果定点碰撞为完全弹性碰撞，e=1，则由(20)式求得A球与其它物体作完全弹性定点碰撞时间为

$$t=\frac{4R}{u} \quad (21)$$

由(20)式和(21)式给出的定点碰撞时间都与对应的移动碰撞时间相等，但定点碰撞力与移动碰撞力不相等，如A球作定点碰撞时受到的力是它与另一质量相等的静止球作移动碰撞时所受力的2倍。由此得出移动碰撞和定点碰撞的效果是不相同的。

前面讨论的定点碰撞是正碰撞的情形，同样可以推出当两球作定点斜碰撞时，其碰撞时间也跟移动斜碰撞的时间相同，即由(7)式或(9)式给出的计算式确定。

三、沿面是点碰撞时间的计算

由定点碰撞的定义，凡在碰撞过程中始终 $v_c=0$ 的碰撞均为定点碰撞，故由(10)式看出，当 $m_1\overrightarrow{u_1}+m_2\overrightarrow{u_2}=0$ 时的碰撞也是定点碰撞，称它为沿面定点碰撞。

设有两个质量均为m，半径均为R的弹性小球A和B，它们在同一直线上沿相反方向以相同速率u运动，某时刻发生完全弹性碰撞。碰撞中两球的速度同时由u减小到零，然后再从零沿着各自相反方向增加到u值。设A球碰撞前的运动方向为正方向。则碰撞过程中A球满足的动量定理为

$$F`t`=m(-u-u)=-2mu \quad (22)$$

另外，设碰撞前B球静止，而A球以速度u与之作对心移动碰撞，到碰撞结束时A球速度为零，故有A球满足的动量定理为

$$Ft=-mu \quad (23)$$

由上两式得

$$F`t`=2Ft \quad (24)$$

式中t\`和F\`为沿面定点碰撞中的时间和碰撞力，而t和F为移动碰撞中的时间和碰撞力，且t已由(21)式给出。因此，要确定t\`，只须找出F\`和F的关系即可。

力是改变物体运动状态的原因，因此，也是改变物体惯性的原因。牛顿第二定律F=mα就是外力在不停的改变着物体的惯性，从而迫使物体不断的改变着每一时刻的运动状态。既然力是改变物体惯性的原因，而量度惯性大小的物理量又是质量，那么物体之间相互作用力的大小，不仅与物体运动状态变化快慢有关，而且与两物体的质量有关。因此，对于两物体的碰撞力而言，只要碰撞物体刚接触时的质心距离和初速度以及两物体质量一定，则碰撞力就一定。又因为(22)式和(23)式中的力F\`和F是同一对球体以相同的速率所作的两种碰撞中的力，它们是相等的(笔者在《碰撞中的经典力学方法》一书中有详细证明)，即F\`=F。故由(24)式，并注意到

(21)式求得两球作沿面定点碰撞的时间计算公式为

$$t` = 2t = \frac{8R}{u} \qquad (25)$$

即为 A 球与静止 B 球作移动碰撞时间的两倍。

如果 A、B 两球质量相等,但大小不同,半径分别为 R1 和 R2,则两球作沿面定点碰撞的时间为

$$t` = \frac{4(R_1 + R_2)}{u} \qquad (26)$$

同样可得出两球作非完全弹性沿面定点碰撞的时间为

$$t_e = \frac{2(1+e)R(1-lis\alpha)}{u\cos\alpha}$$

$$或 t`_e = \frac{(1+e)(R_1+R_2)(1-lis\alpha)}{u\cos\alpha} \qquad (27)$$

以上我们讨论了两种定点碰撞模型。把 A 球与 B 球的沿面定点碰撞和 A 球与静止重物体的定点碰撞作比较,前者的碰撞时间是后者碰撞时间的 2 倍,但后者的碰撞力是前者碰撞力的 2 倍。所以在两种碰撞中 A 球所受的冲量是相等的。

四、非球形物体碰撞时间的计算

前面讨论了球体的碰撞时间计算问题,其方法完全适用对非球形物体碰撞时间的讨论。所不同的是,由于球体形态对称,碰撞时的接触点可以任意选取都有相同的质心距离,因此,得到的碰撞时间是唯一的。而非球形物体,由于形态不完全对称,选择不同的部位碰撞。刚接触时刻的质心距离就不同,得到的碰撞时间也就不同。也就是说非球形物体的碰撞时间不是唯一的,而是与碰撞部位有关。下面以长方体滑块的碰撞为例加以讨论。

设有两质量相等,分布均匀,大小和形状相同的长方体滑块 A 和 B,其质量均为 m,长、宽、高均为 α, b, 和 h,碰撞前它们同在一光滑导轨上以不同的速度同向运动,其中 A 的速度为 u_1,B 的速度为 u_2,且 $u_1 > u_2$,故有某时刻两滑块发生对心碰撞。如果两滑块的碰撞是沿长边方向,称之为纵向碰撞。此时,两滑块刚接触时的质心距离为

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha \qquad (28)$$

若为完全弹性碰撞,则因质量相等,到碰撞结束时 A 滑块质心 C_1 的速度由 u_1 减小到 u_2,C_1 的位置也由刚接触时自身所在的位置移动到刚接触时 B 滑块质心 C_2 所在的位置。又因两滑块刚接触时刻 C_1 和 C_2 的距离为 α,由(28)式给出。故有在整个碰撞过程中 C_1 按减速直线运动规律沿碰撞方向移动 α 的距离。又因为是完全弹性碰撞,到碰撞结束时 C_1 和 C_2 以及系统质心 C 之间又还原成刚接触时刻的距离,亦即 C_1, C_2 和 C 在碰撞过程中移动了相同的距离 α,即

$$S_1 = S_2 = S_c = \alpha \qquad (29)$$

S_1、S_2 和 S_C 分别表示 C_1、C_2 和 C 的位移,又因为碰撞力不会改变系统质心的运动状态,即 C 作匀速直线运动,其速度为

$$\nu_c = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \qquad (30)$$

由(29)和(30)式求出两滑块纵向碰撞时间为

$$t = \frac{s_c}{\nu_c} = \frac{2\alpha}{u_1 + u_2} \qquad (31)$$

如果两滑块长边不相等,分别为 α_1 和 α_2,则(31)式可改写为

$$t = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{u_1 + u_2} \qquad (32)$$

再讨论横向碰撞问题。如果两滑块是沿宽边方向碰撞,则 C_1, C_2 和 C 在碰撞过程中移动的距离不再是(29)中的 α,而是

$$s`_1 = s`_2 = s`_c = b \qquad (33)$$

而 C 的速度仍然是(30)式的值。故有两滑块作横向碰撞的时间为

$$t` = \frac{s`_c}{\nu_c} = \frac{2b}{u_2 + u_2} \qquad (34)$$

比较(31)式和(34)式,因 α> b,有 t> t`,即同一对滑块的纵向碰撞时间较横向碰撞时间长。另外,还可直接对上述结果进行分析得出非完全弹性碰撞时间。

容易证明在完全弹性碰撞中,第一阶段的时间等于第二阶段的时间。故由(31)式和(34)式得出完全弹性碰撞第一阶段和第二阶段的时间为

$$t_1 = t_2 = \frac{\alpha}{u_1 + u_2} \text{ 或 } t`_1 = t`_2 = \frac{b}{u_1 + u_2} \qquad (35)$$

另外,也容易证明非完全弹性碰撞与完全弹性碰撞第一阶段的时间相同。而第二阶段里,非完全弹性碰撞的时间是完全弹性碰撞时间的 e 倍,e 为恢复系数。因此,如果两滑块是作非完全弹性纵向碰撞时,第一阶段和第二阶段的时间为

$$t_{1e} = \frac{\alpha}{u_1 + u_2} \text{ 和 } t_{2e} = \frac{e\alpha}{u_1 + u_2} \qquad (36)$$

由上式求出两滑块作非完全弹性纵向碰撞的时间为 $t_e = t_{1e} + t_{2e} = \frac{(1+e)\alpha}{u_1 + u_2}$　　(37)

用同样的方法可求出非完全弹性横向碰撞的时间公式为

$$t`_e = \frac{(1+e)b}{u_1 + u_2} \qquad (38)$$

对于完全非弹性碰撞，e = 0，则由(37)式和(38)式看出完全非弹性碰撞时间就是(35)式给出的完全弹性碰撞第一阶段的时间。表明完全非弹性碰撞只有第一阶段而无第二阶段。由以上讨论看出，非球形物体的碰撞时间不唯一，随碰撞部位的不同而不同。但对于同一对碰撞物体而言，只要它们是用相同的速度以相同的方式碰撞，则碰撞物体动量和动能的改变是相同的。即动量定理和动能定量是唯一的，与碰撞部位无关。只是当位移和碰撞时间短时碰撞力大，反之，当位移和碰撞时间长时碰撞力小。

参考文献：

[1] 郑焕武．碰撞中的经典力学方法．四川出版集团：四川科学技术出版社，2004.4.

[2] 郑焕武．碰撞时间的定量计算．四川师范大学学报，2001年第3期．

The Derivation of Several Kinds of Collision Time Calculation Formulae

ZHENG Huan－wu

(Physics Department, Xichang College, Xichang Sichuan 615022)

Abstract: The paper discusses again the collision time calculation for the oblique collision, the designated collision and the non spherical object collision after the article "The Quantitative Calculation of Collision Time". It also gives the corresponding time calculation formulae.

Key words: Oblique collision; Designated collision; Collision time calculation

（责任编辑：张荣萍）

（上接26页）

XU Cheng－bo, HAN Qiong－hui

(Department of Economic Management, Xichang college, Xichang Sichuan 615013)

Abstract: Under current situation, the question of "The agriculture, the rural area, the farmers" has become a very important job for our country government , while the core of the "The agriculture, the rural area, the farmers" is the farmer question . How to enhance farmer' s income, how to shift the surplus labor force in the countryside, which has become a key point for soluting the "The agriculture, the rural area, the farmers". Regarding this , the article from agricultural industrial production in this stratification plane unifies the countryside present situation of Liangshan state to make a brief analysis theoretically that the agricultural industrial production shifts the countryside surplus labor force locally.

Key words: Agricultural industrial production; Countryside surplus labor force; Shift locally

（责任编辑：张荣萍）