

“更相减损术”不是求最大公因数的算法

马再鸣¹, 蒋晓云²

(1. 西昌学院, 四川 西昌 615022;

2. 桂林师范高等专科学校 数学与计算机科学系, 广西 桂林 541001)

【摘要】人民教育出版社出版的普通高中课程标准实验教科书《数学③》(必修)指出《九章算术》中的“更相减损术”是求两个数的最大公约数的算法,其实“更相减损术”是将一个分数化简为既约分数的算法。

【关键词】更相减损术;九章算术;最大公因数

【中图分类号】O121 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2006)02-0031-03

算法是《普通高中数学课程标准(实验稿)》引入的新内容之一,作为高中数学必修内容,并提出“通过阅读中国古代数学中的算法案例,体会中国古代数学对世界数学发展的贡献”的要求。近期由人民教育出版社出版的普通高中课程标准实验教科书《数学③》(必修)(以下简称课本)第一章“算法初步”中介绍了我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”。新教材的内容难免存在一些瑕疵,本文就课本中关于“更相减损术”的解释提出一管之见,与大家商榷,不妥之处,请专家们斧正。

1 错例的发现

为了方便说明,现将课本第27页课文照抄如下:《九章算术》是中国古代的数学专著,其中也有求两个数的最大公约数的算法——“更相减损术”,

即“可半者半之,不可半者,副置分母、子之数,以少减多,更相减损,求其等也。以等数约之。”

翻译为现代语言如下。

第一步:任意给定两个正整数;判断它们是否都是偶数。若是,用2约简;若不是,执行第二步。

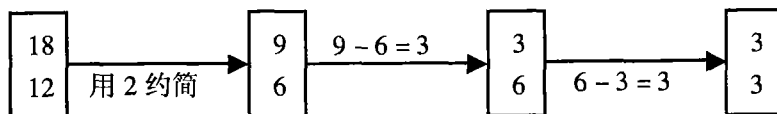
第二步:以较大的数减去较小的数,接着把所得的差与较小的数比较,并以大数减小数。继续这个操作,直到所得的数相等为止,则这个数(等数)就是所求的最大公约数。

下面我们用一个例子说明课本对“更相减损术”术文含义的理解是不全面的。

例1 求18与12的最大公约数。

解:第一步:由于18与12均为偶数,用2约简得到9和6。

第二步:把9和6以大数减去小数,并辗转相减,直到所得到的数相等为止。过程如下图所示。



所以,18与12的最大公约数为3(等数)。这显然是一个错误的结果。

2 古代名著原文分析

笔者查阅《九章算术》“方田”章的第六题的原文:

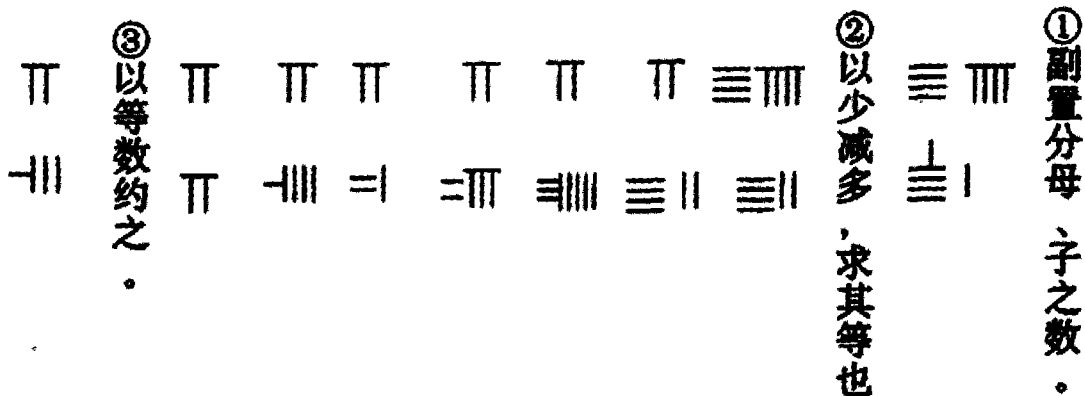
“又有九十一分之四十九。问:约之,得几何?答曰:十三分之七。”

约分术曰:可半者半之,不可半者,副置分母、子之数,以少减多,更相减损,求其等也,以等数约之。

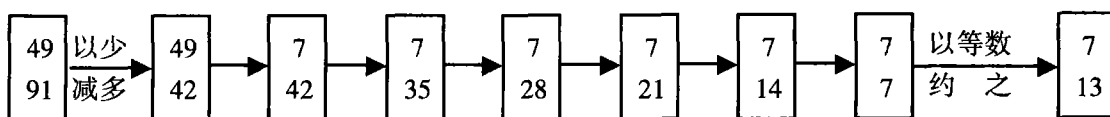
《九章算术》是以算筹为算具的数学书,现将上述算题作算筹图式,以帮助我们领会“更相减损术”术文的真实含义。

收稿日期:2006-04-30

作者简介:马再鸣(1957-),男,副教授,主要从事数学教育教学与研究。



上述演算过程表为现代形式为：



由此可见，“更相减损术”是将一个分数化简为既约分数的算法。翻译为现代语言如下。

第一步：任意给定分数 $\frac{m}{n}$ (m, n 为两个正整数)；判断 m, n 是否都是偶数。若是，用 2 约简；若不是，才执行第二步。

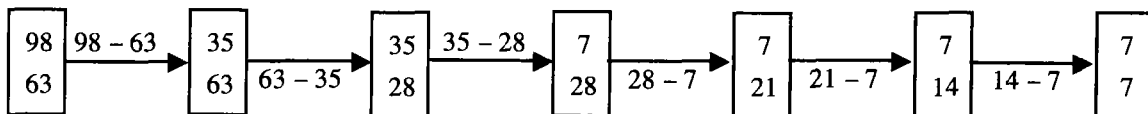
第二步：对分子和分母辗转相减，以较大的数减去较小的数，接着把所得的差与较小的数比较，并以大数减去小数。继续这个操作，直到所得的数相等为止。

第三步：以等数约之，可得到(最简)既约分数。

但是分数化简与求最大公约数是紧密关联的。“更相减损术”中的“副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也”是求两个整数的最大公约数的算法，我们不妨把它称之为辗转相减法。

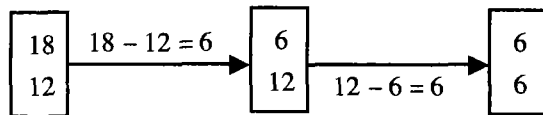
翻译为现代语言如下：任意给定两个正整数，以较大的数减去较小的数，接着把所得的差与较小的数比较，并以大数减去小数。继续这个操作，直到所得的数相等为止，则这个数(等数)就是所求的最大公约数。

例 2 求 18 与 12 的最大公约数。



我们对一些学生进行对比测试，结果表明：多数学生单凭笔算等式不能理解“更相减损术”术文的含义，而筹算推演表述直观，符合学生心理特点，有助于学生领会术文的真实含义，并能更方便学生

解：由下述辗转相减过程可得 18 与 12 的最大公约数为 6。

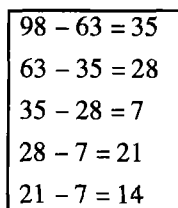


3 算法的表述形式

课本类似辗转相除法的书写方式表述辗转相减的过程，现将课本第 27 页例 1 及解答照抄如下(注：原解中有一个明显错误，在抄写过程中作了更正)。

例 用更相减损术求 98 与 63 的最大公约数。

解 由于 63 不是偶数，把 98 和 63 以大数减小数，并辗转相减，如下图所示：



所以，98 与 63 的最大公约数等于 7。

我们类似《九章算术》的筹算推演过程来表述辗转相减法的操作步骤：

用流程图或计算机算法语言来描述算法。

我们建议课本介绍《九章算术》的“更相减损术”中例题：“又有九十一分之四十九。问：约之，得几何？答曰：十三分之七。”及筹算推演过程，让学生感

悟中国古代数学的算法思想, 在解题过程中将其转换为筹算推演的现代形式。

数学机械化思想正是我国古代数学的精髓, 现代计算机科学是算法的科学, 它需要机械的算法, “更相减损术”是中国古代算法中的瑰宝, 要让它放射出光辉必须与现代计算机程序结合。

我们用变量 m 和 n 来表示两个整数, 辗转相减法的过程, 就是一个机械重复执行较大数减去较小数; 直到所得的两数相等为止, 我们可以把它看作一个循环结构, 先用程序框图把这个结构表示出来。然后编写一个计算机程序。教学中应结合计算机程序, 让学生领略到“更相减损术”对现代计算机算法的影响。

```
PROGRAM example(input, output);
VAR m, n, t: integer;
BEGIN
  read(m, n);
  WHILE m <> n DO
  IF m > n
  THEN m := m - n
  ELSE n := n - m;
  writeln('gcd = ', m);
```

参考文献:

[1] 刘绍学, 张淑梅等. 普通高中课程标准实验教科书数学③(必修)[M]. 人民教育出版社, 2004.

Decreases Technique, not the Algorithm of Asking for the Maximum Common Divisor

MA Zai - ming¹, JIANG Xiao - yun²

(1. Xichang college, Xichang Sichuan 615022;

2. Department of Mathematics and Computer Science, Guilin Teachers' College, Guilin Guangxi 541001)

Abstract: The ordinary high school curriculum standard experiment textbook 《Maths ③》(compulsory) edited by the people's educational publishing house points out “decreases technique” of 《Nine chapters on Mathematical art》is the algorithm of asking for the maximum common divisors. Actually “decreases technique” is to Simplify a score for the algorithm which has already reduced a fraction.

Key words: Decreases technique; Nine chapters on Mathematical art; Maximum common divisor.

(责任编辑: 张荣萍)

END.

