五维波动问题的一种解法

董治平，徐淑范

（重庆工业职业技术学院，重庆 400050）

【摘 要】 五维波动问题历来没有求解的方法和公式。本文介绍解五维波动问题的微分算子级数法。文章首先，引进数性算子概念及微分算子级数法，其次，推导求解公式，第三，例题。

【关键词】 波动方程；微分算子级数法；数性算子；线性微分方程；柯西问题

【中图分类号】 O241 **【文献标识码】** A **【文章编号】** 1673-1891(2006)01-0054-05

一、前言

用微分算子法求常系数常微分方程的特解，早已有之。但解法较繁，且不能求通解。一般来讲，数学工作者用微分算子讨论方程解的存在、唯一和稳定性，不用它来求方程(组)的古典解。因为，在泛函分析中微分算子无界，由它组成的微分算子符号级数不收敛，故讨论它无意义[1]。我们知道，线性微分方程解的存在性早已解决[2][3][4]，对 $n\geq 4$ 时的线性波动方程至今没有解析的解法和公式[2][3]。为了解这类方程，我国数学工作者引进了数性算子概念（它有两重性：变数的数值性和微分算子的微分性）。这个概念的引入有几个好处。第一，克服了微分算子无界的障隘，从而创立了微分算子级数法（Differentiator Series Method, 简记 DSM）[5][6][7][8]；第二，对常系数线性(常、偏)微分方程求解作了一个小结，并得到一个统一的解法——微分算子级数法[6]；第三，解决了几类积分计算化为微分计算的问题[9][10]。下面我们介绍解五维波动方程问题的方法和实例。

二、公式推导

1、柯西问题的解。

设五维波动方程柯西问题 A：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta_5 u=0 & (x\in R^5, t>0) \quad (1)\\ u(x,0)=\phi(x) & (x\in R^5) \quad (2)\\ u_t(x,0)=\psi(x) & (x\in R^5) \quad (3)\end{cases}$$

其中 $\Delta_5=\sum_{i=1}^{5}D_{x_i}^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$， $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$， $D_{tt}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}=(D_t)^2$，

并设 $\phi(x),\psi(x)$ 均 $\in C^\infty$。

在上述假设下，问题 A 有解且唯一稳定。

用微分算子符号，(1)式变为 $(D_t^2-a^2\Delta_5)u=0$，因 Δ_5

模 $|\Delta|$，使得 $\left|\frac{a^2\Delta_5}{D_t^2}\right|\angle 1$， 从而有解：

收稿日期：2005－12－25

作者简介：董治平（1954－ ），女，副教授，主要从事应用数学的教学研究。

$$u_1(x,t)=\frac{1}{D_t^2-a^2\Delta_5}\cdot 0=\frac{1}{D_t^2}\frac{1}{1-\frac{a^2\Delta_5}{u_t^2}}\cdot 0=\frac{1}{D_t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}\Delta_5^k}{D_t^{2k}}\cdot 0$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^2\Delta_5^k}{D_t^{2k}}[c_2(x)t+c_1(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{a^{2k}t^{2k}}{(2k)!}\Delta_5^k c_1(x)+\frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta_5^k c_2(x)\right]$$

$$=c_1(x)+t\,c_2(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(at)^{2k}}{(2k)!}\Delta_5^k c_1(x)+\frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta_5^k c_2(x)\right]。$$

代入（2）式，$u_1(x,0)=c_1(x)=\phi(x)$，代入（3）式，$u_{1t}(x,0)=c_2(x)=\psi(x)$，从而

从而 $$u_1(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(at)^{2k}}{(2k)!}\Delta_5^k\phi(x)+\frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta_5^k\psi(x)\right] \tag{4}$$

2、非齐次方程柯西问题的解。

设五维非齐次方程柯西问题 B：
$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta_5 u=f(x,t), & x\in R^5,t>0 \quad (5)\\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=0, & x\in R^5 \quad (6)\end{cases}$$

其中 D_t^2 和 Δ_5 同 A 问题，并设 f（x,t）=T（t）Q（x），且 $T(t)\in c,Q(x)\in c^{\infty}$。

在上述假设之下，问题 B 有解且唯一稳定。

（5）式的微分算子形式：$(D_t^2-a^2\Delta_5)u=T(t)Q(x)$，所以

$$u_2(x,t)=\frac{1}{D_t^2-a^2\Delta_5}T(t)Q(x)=\frac{1}{D_t^2}\frac{1}{1-(a^2\Delta_5)/D_t^2}T(t)Q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}\Delta_5^k}{D_t^{2k+2}}T(t)Q(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{D_t^{2k+2}}T(t)\Delta_5^k Q(x) \tag{7}$$

当已知 $\phi(x),\psi(x),T(t),Q(x)$ 且符合条件时代入(4)、(7)可求得 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$。注意到 $\frac{1}{D_t}=\int_0^t(\ )dt$，不加任意常数。

3、五维非齐次方程柯西问题的解。

设五维非齐次波动方程柯西问题 C：
$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta_5 u=f(x,t), & x\in R^5,t>0\\ u(x,0)=\phi(x),u_t(x,0)=\psi(x), & x\in R^5\end{cases},$$

D_t^2，Δ_5，f（x,t）同问题 A、B，且 $T(t)\in c,\phi,\psi,Q$ 均 c^{∞}，由线性方程问题迭加原理，

显然问题 C 的解：$u_3(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$，即

$$u_3(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(at)^{2k}}{(2k)!}\Delta_5^k\phi(x)+\frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta_5^k\psi(x)+\frac{a^{2k}}{D_t^{2k+2}}T(t)\Delta_5^kQ(x)\right] \tag{8}$$

其中 $x\in R^5, t\phi 0$。

三、例题

例 1：设五维波动方程柯西问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta_5 u=0 & x\in R^5, t>0, x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\ u(x,0)=x_1^2x_2x_3^2x_4x_5 & x\in R^5\\ u_t(x,0)=x_1x_2x_3x_4sh(2x_5) & x\in R^5\end{cases}$$

，试求其解。

解：因 $\phi(x)=x_1^2x_2x_3^2x_4x_5, \psi(x)=x_1x_2x_3x_4sh(2x_5)$ 均 $\in C^\infty$，故可用公式(4)求解，

从而 $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(at)^{2k}}{(2k)!}\Delta_5^k(x_1^2x_2x_3^2x_4x_5)+\frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta_5^k(x_1x_2x_3x_4sh(2x_5))\right]$

$$=\left[1+\frac{(at)^2}{2!}\Delta_5+\frac{(at)^4}{4!}\Delta_5^2\right](x_1^2x_2x_3^2x_4x_5)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta_5^k(x_1x_2x_3x_4sh(2x_5))。$$

而 $\Delta_5\phi(x)=(D_{x_1}^2+D_{x_2}^2+D_{x_3}^2+D_{x_4}^2+D_{x_5}^2)(x_1^2x_2x_3^2x_4x_5)$

$$=2x_2x_3^2x_4x_5+2x_1^2x_2x_4x_5,$$

$$\Delta_5^2\phi(x)=\Delta_5(2x_2x_3^2x_4x_5+2x_1^2x_2x_4x_5)=8x_2x_4x_5,$$

又 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta_5^k(x_1x_2x_3x_4sh(2x_5))=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}x_1x_2x_3x_4\cdot 2^{2k}sh(2x_5)$

$$=\frac{1}{2a}x_1x_2x_3x_4sh(2x_5)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2at)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{1}{2a}x_1x_2x_3x_4sh(2x_5)ch[2at]。$$

代入上式有(问题的)解：$u(x_1,x_2,x_3x_4,x_5,t)=$

$$=\left[x_1^2x_2x_3^2x_4x_5+a^2t^2(x_2x_3^2x_4x_5+x_1^2x_2x_4x_5)+\frac{1}{3}a^4t^4x_2x_4x_5\right]+$$

$$\frac{1}{2a}x_1x_2x_3x_4sh(2x_5)ch(2at)。$$

例 2:设五维非齐次方程波动问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta_5 u = x_1x_2^2x_3x_4x_5\cos(2t) & (x\in R^5, t>0) \\ u(x,0)=0=u_t(x,0) \end{cases},$$

$$f(x,t)=x_1x_2^2x_3x_4x_5\cos(2t), T(t)=\cos(2t)\in c,\ Q(x)=x_1x_2^2x_3x_4x_5\in c^\infty,$$

故可用(7)求问题的解:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{D_t^{2k+2}}\cos(2t)\Delta_5^k\left(x_1x_2^2x_3x_4x_5\right)=\frac{1}{D_t^2}\cos(2t)\left(x_1x_2^2x_3x_4x_5\right)+$$

$$\frac{a^2}{D_t^4}\cos(2t)\Delta_5\left(x_1x_2^2x_3x_4x_5\right)。$$

而 $\Delta_5 Q(x)=\left(D_{x_1}^2+D_{x_2}^2+D_{x_3}^2+D_{x_4}^2+D_{x_5}^2\right)\left(x_1x_2^2x_3x_4x_5\right)=2x_1x_3x_4x_5$,

因 $D_t^{-1}=\int_0^t(\ )dt$,所以 $\frac{1}{D_t^2}\cos(2t)=R_e\frac{1}{D_t^2}e^{2it}=R_e e^{2it}\frac{1}{\left(D_t+2i\right)^2}\cdot e^{0t}$ ①

$=R_e e^{2it}\frac{1}{\left(0+2i\right)^2}$ ② $=-\frac{1}{4}R_e e^{2it}=-\frac{1}{4}\cos(2t)$,

$$D_t^{-4}\cos(2t)=R_e\frac{1}{D_t^4}e^{2it}=R_e e^{2it}\frac{1}{\left(D_t+2i\right)^4}\cdot e^{0t}=R_e e^{2it}\frac{1}{\left(0+2i\right)^4}=\frac{1}{16}\cos(2t)。$$

代入上式有解: $u\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,t\right)=\frac{1}{8}\left(a^2-2x_2^2\right)x_1x_3x_4x_5\cos(2t)$。

显然,例 1、例 2 解的和是问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta_5 u = x_1x_2^2x_3x_4x_5\cos(2t), & (x\in R^5, t>0) \\ u(x,0)=x_1^2x_2x_3^2x_4x_5, & x\in R^5 \\ u_t(x,0)=x_1x_2x_3x_4 sh(2x_5), & x\in R^5 \end{cases}$$ 的解。

不难验证,例 1、例 2 的解是满足相应问题的解。

四、结束语

从五维波动方程问题的解算过程我们可以说:微分算子级数法不但可以求五维非齐次波动问题的解,而且可以求任何维(n≥5)波动问题的解。只要 $f(x,t)=T(t)Q(x)$ 且 $T(t)\in c,\phi(x),\psi(x),Q(x)$ 均 $\in c^\infty$。

综合上述,用微分算子级数解常系数线性微分方程问题的简单、迅速和有效性的事实已勿用置疑。关于数性算子和由它建立起来的微分算子级数法的科学性和优越性明显可鉴,确实是值得推广的好方法。

参考文献

[1] E. kreyszig, Introductory Functional Analysis with Application, wiley, New York, 1978.

[2] Fritz John, Partial differential equations(Fourth edition)Springer - Verlag, 1982.

[3] 姜礼尚,陈亚浙,数学物理方程讲义,北京,高等教育出版社,1986年。

[4] 陆文端著,微分方程中的变分方法(修订本),科学出版社,北京,2003年。

[5] 柯红路,谢和熙,线性微分方程的微分算子级数解法,应用数学和力学,Vol: 20, No: 8(1999), 880 - 887。

[6]柯红路,微分方程的新解法——微分算子级数法,北京中国科学文化出版社,2003年。

[7] 柯红路,微分算子级数法及其在微分方程中的应用,渝州大学学报,15卷3期,(11 - 16页),(1988)。

[8]柯红路,一类柯西问题的算子级数法,重庆建筑大学学报,11卷3期,(30 - 36页),(1989)。

[9] 柯红路,用微分算子级数法计算广义积分,重庆建筑大学学报,18卷1期,(110 - 113页),(1996)。

[10]万邵生,柯红路,用微分算子级数法计算几类积分,重庆师范学院学报,14卷增刊,(99 - 102页),(1997)。

注① $\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}=e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}$。注②(当时)。$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x}$(当$F(\alpha)\neq 0$时)

注①②出自参考文献[6]中的逆微分算子运算公式4°和1°。见书中8~9页。

One Solution of the Five - Dimensional Wave Equation

DONG Zhi - ping, XU Shu - fan

(Chongqing industrial Polytechnic College, Chongqing 400050)

Abstract: From the past down to the present, the five - dimensional wave equation problem has not the method and formula for solution. In this paper, introduced the Differentiator Series Method to solve the five - dimensional wave equation problem. First, introduce the scalar operator concept and the Differentiator Series Method ; second, derive and obtain the formula of the solving process; third, examples .

Key words: Wave equation; Differentiator Series Method; Scalar operator; Linear differential equation; Cauchy problem

(上接47页)

(NingNan County Agriculture Bureau, NingNan Sichuan 615000)

Abstract: For the renewal that acceleration my county two half mountain paddy rice the species change the on behalf, seed to stand usher new species in recent years in to suit me fine the county of District of two half mountain at normal regulations, but because of under the new market mechanism, the new species of normal regulations paddy rice that can be provided to usher in is less and less, even the select a new species, in the production of use that time limit too only 3 ~ 5 years, species renew the speed to have become to produce the inside the most outstanding problem. Aim at paddy rice the species renew to change the on behalf on my county the elevation 1450 - 1700 m two half mountain District, in the 2003, seed to stand usher in the precocious to hand over the to experiment success, changing history of can't plant hybridize rice the my county on high two half mountain Districts. In 2004 , demonstrates 20 Acre, come to a 469. 7 kilogram, than check against to increase 13. 7%.

Key words: paddy rice; New breed; Two half mountain; Usher species