求函数值域及最值

敖 兵

（凉山州民族中学，四川 西昌 615000）

【摘 要】 求函数值域是高考数学中的重要题型之一，对求函数值域常用方法如直接法、反函数法、判别式法、函数的单调性法、换元法、均值不等式法、构造法、导数法等进行了系统的研究。

【关键词】 函数值域；最大值；方法

【中图分类号】G633.64 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2005)02-0051-04

函数值域及最值是高考数学中的重点和热点题型，在函数的教学中抓住三个要素：对应法则、定义域、值域。其中函数值域是难点，在教学中教师应将常用的方法总结归纳出来，同时讲清楚各种方法的关键之处和内在的联系，还应该把高考中和数学竞赛中出现的题型的解法归纳出来，挖掘知识间关系、揭示解题的技巧、分析和寻找解题的最佳途径。

1 直接法

直接法又叫观察法，是通过对函数解析式观察和分析用直接求解的方法求得函数值域。

例1 设复数$z=3\cos\theta+i2\sin\theta$，求函数$y=\theta-\arg z$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$的最大值及对应的θ值（1999年全国高考试题）。

解：$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\theta>0$，又$z=3\cos\theta+i2\sin\theta$，$\Rightarrow 0<\arg z<\frac{\pi}{2}$

$\therefore\tan(\arg z)=\frac{2\sin\theta}{3\cos\theta}=\frac{2}{3}\tan\theta$，

$\therefore\tan y=\tan(\theta-\arg z)=\frac{\tan\theta-\frac{2}{3}\tan\theta}{1+\frac{2}{3}\tan^2\theta}=\frac{\tan\theta}{3+2\mathrm{ran}^2\theta}=\frac{1}{\frac{3}{\tan\theta}+2\tan\theta}$

$\because\frac{3}{\tan\theta}+2\tan\theta\geq2\sqrt{6}$，$\therefore\frac{1}{\frac{3}{\tan\theta}+2\tan\theta}\leq\frac{\sqrt{6}}{12}$

当且仅当$\frac{3}{\tan\theta}=2\tan\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$时，取得等号，

$\therefore\theta=\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}$时，$(\tan y)_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{12}$，$Q y=\theta-\arg z$ $\Rightarrow y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

而在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上$y=\tan x$是单调递增函数，

$\therefore y_{\max}=\arctan\frac{\sqrt{6}}{12}$.

2 配方法

对复合有二次函数的函数求值域问题，可用二次函数进行配方来求值域。

例2 求函数的值域.

解：$\because 4x-x^2\geq0\Rightarrow0\leq x\leq4$，而$4x-x^2=-(x-2)^2+4\leq4$ 当$x=2\in[0,4]$时，取得等号， $\therefore y\in[0,2]$

3 反函数法

当函数的反函数存在时，就可用反函数法。因为原函数的值域等于反函数的定义域，将反函数定义域求出即可得到原函数的值域。

例3 求函数$y=\frac{\sin x-3}{\cos x+3}$的值域.

解：$\because$ $y=\frac{\sin x-3}{\cos x+3}\Rightarrow\sin x-y\cos x=3y+3\Rightarrow\sqrt{y^2+1}\cdot\sin(x+\varphi)=3y+3$

（其中$\tan\varphi=-y$），$\because|\sin(x+\varphi)|\leq1$

收稿日期：2005-03-28

作者简介：敖兵(1970-)，男，中学高级教师，主要从事中学数学研究。

$\therefore |\frac{3y+3}{\sqrt{y^2+1}}|\le 1\Rightarrow 4y^2+9y+4\le 0\Rightarrow -\frac{9+\sqrt{17}}{8}\le y\le\frac{\sqrt{17}-9}{8}$，

故$y\in[-\frac{9+\sqrt{17}}{8},\frac{\sqrt{17}-9}{8}]$

4 判别式法

将函数视为关于某个自变量的二次方程，利用判别式求其范围就能求出函数式的值域。

例4 求函数$y=\frac{2x^2+2x+5}{x^2+x+1}$的值域.

解 将原式变形为 $(y-2)x^2+(y-2)x+y-5=0$

当$y=2$时，即原式就变为 $-3=0$，与$-3\neq 0$矛盾，故$y\neq 2$.

当$y\neq 2$时，$\because x\in R$，$\therefore V=(y-2)^2-4(y-2)(y-5)\ge 0$

$\Rightarrow (y-2)(y-6)\le 0\quad\Rightarrow 2\le y\le 6$，

由$\because y\neq 2$，$\therefore y\in(2,6]$

5 倒区间法

对分式函数式的函数值域问题，若分子是常数时而分母的范围是可求，只需将分母的范围倒过来就能求出函数式的值域.

例5 求函数$y=\frac{2x^2+2x+5}{x^2+x+1}$的值域.

解 $\because y=\frac{2x^2+2x+5}{x^2+x+1}=2+\frac{3}{x^2+x+1}=2+\frac{3}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$\because[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]\in[\frac{3}{4},\infty)$，$\therefore 0<\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\le\frac{4}{3}$

$\therefore 2<2+\frac{3}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}2+\frac{3}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\le 6$，即$y\in(2,6]$.

6 函数的单调性法

例6 求$y=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}$函数的值域.

解 $\because\begin{cases}x-2\ge 0\\x-5\ge 0\end{cases}\Rightarrow x\ge 5$，而易证函数$y=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}=\frac{3}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}}$

在$x\in[5,\infty)$上是单调递减函数，

$\therefore x=5$时，$y_{max}=\sqrt{3}$，而$y=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}=\frac{3}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}}\ge 0$

$\therefore y\in[0,\sqrt{3}]$.

7 换元法

通过换元把一个复杂的函数变为简单的函数，就能求出函数式的值域。

例7 求下述代数式的最小值，$|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$，其中x为实数(第64届普特兰数学竞赛试题).

解 设$f(x)=\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x$

$=\sin x+\cos x+\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$

令$t=\sin x+\cos x$，则$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，而$|t|\le 1$，且$t\neq 1$.

$f(x)=t+\frac{2}{t^2-1}+\frac{2t}{t^2-1}=t+\frac{2}{t-1}=t-1+\frac{2}{t-1}+1$

当$t>1$时，$t-1+\frac{2}{t-1}+1\ge 1+2\sqrt{2}$，当且仅当$t=1+\sqrt{2}\notin[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$时取得等号.所以$f(x)_{min}\neq 1+2\sqrt{2}$.

当$t<1$时，$1-t>0$

$f(x)=[(1-t)+\frac{2}{1-t}]+1\ge -1+2\sqrt{2}$，当且仅当$t=1-\sqrt{2}\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$时取得等号， $\therefore|f(x)|_{min}=2\sqrt{2}-1$

8 几何法

当一个函数明显具有某种特殊的几何意义时，若两点间的距离公式、直线的斜率等，就可利用几何意义求出函数式的值域。

例8 求函数$y=\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$的最大值和最小值。

解 由直线的斜率知，可将上面求函数最大值和最小值问题转化

为过两点A(2,1),P(−cosx,−sinx)的直线斜率最大值和最小值问题.

而P点是单位圆$x^2+y^2=1$上的动点

则$K_{AP}=\frac{1+\sin x}{2+\cos x}=\frac{1-(-\sin x)}{2-(-\cos x)}$

由几何意义得：$(K_{AP})_{max}=\frac{4}{3}$，$(K_{AP})_{min}=0$

及$y_{max}=\frac{4}{3}$，$y_{min}=0$.

9　均值不等式法

函数解析式为和式时,其对应的乘积为定值；函数解析式为积式时,其对应的和为定值,就可利用均值不等式求出函数式的值域。

例9　已知x,y,z为满足x+y+z=1的非负实数,试证：

$$x^2y+y^2z+z^2x\le\frac{4}{27}$$

并指出等号成立的条件(1999年加拿大数学奥林匹克试题).

分析：从表面上看不是求最值,但仔细分析就是求$x^2y+y^2z+z^2x$式子的最大值.

证明：$x^2y+y^2z+z^2x\le x(xy+yz+z^2)\le x[y(y+z)+\frac{1}{2}z(x+z)]$

$$=x(x+z)(y+\frac{1}{2}z)=\frac{1}{2}x(x+z)(2y+z)$$

$$\le\frac{1}{2}[\frac{x+(x+z)+(2y+z)}{3}]^3=\frac{1}{2}[\frac{2(x+y+z)}{3}]^3=\frac{4}{27}$$

当x,y,z中一个为$\frac{2}{3}$,另一个为$\frac{1}{3}$,其余为0时等号成立.

10　三角函数法

例10　设实数x,y,m,n满足$x^2+y^2=3$,$m^2+n^2=1$,求mx+ny的最值.

解：设$x=\sqrt{3}\cos\theta$,$y=\sqrt{3}\sin\theta$,$m=\cos\varphi$,$n=\sin\varphi$

$\therefore mx+ny=\sqrt{3}\cos\theta\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi=\sqrt{3}\cos(\theta-\varphi)$

$\therefore (mx+ny)_{max}=\sqrt{3}$,$(mx+ny)_{min}=-\sqrt{3}$

11　构造法

例11　求函数$y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$的值域.

解：$y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$$=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{3}\,2)^2}-\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\sqrt{3}\,2)^2}$$

设$z_1=x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z_2=x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,显然$z_1\neq z_2$,

由$|y|=||z_1|-|x_2||<|z_1-z_2|=1$，故函数的值域为$y\in(-1,1)$.

12　导数法

例12　设函数$f(x)=-a\sqrt{x^2+1}+x+a$,$x\in(0,1]$,$a\in R^+$；

(1)若f(x)在(0,1]上是增函数,求a的取值范围；

(2)求f(x)在(0,1]上的最大值.

解：当$x\in(0,1]$时,$f'(x)=-a\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1$

(1)要使f(x)在$x\in(0,1]$上是增函数,$f'(x)=-a\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\ge$ 在(0,1]上恒成立。

即$a\le\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$在(0,1]上恒成立。

而$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$在(0,1]上的最小值为$\sqrt{2}$,又$a\in R^+$

$\therefore 0<a\le\sqrt{2}$

(2) i)$0<a\le\sqrt{2}$时,f(x)在(0,1]上是增函数,

$[f(x)]_{max}=f(1)=(1-\sqrt{2})a+1$

ii)$a>\sqrt{2}$时,$f'(x)=0$,得$x=\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}\in(0,1]$

∵当$0<x<\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}$时,$f'(x)>0$；当$\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}<x\le1$时,$f'(x)<0$

$$\therefore [f(x)]_{max}=f(\sqrt{\frac{1}{a^2-1}})=a-\sqrt{a^2-1}.$$

13 极坐标法

例13 椭圆$b^2x^2+a^2y^2=1$上有两点A,B,O是椭圆的中心,且

$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$,求三角形AOB面积的最大值和最小值.

解 以椭圆的中心O为极点,以椭圆的长轴为极轴建立极坐标系,则椭圆极坐标方程为

$\rho^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)=a^2b^2$,设$A(\rho_1,\theta)$,$B(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{2})$,

$$\rho_1^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta},\rho_2^2=\frac{a^2b^2}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta},$$

$$S_{VAOB}^2=(\frac{1}{2}\rho_1\rho_2)^2=\frac{a^4b^4}{(a^2-b^2)^2\sin^{22}\theta+4a^2b^2}$$

$\because 0\le\sin^{22}\theta\le 1$,

$$\therefore\frac{a^4b^4}{(a^2+b^2)^2}\le S_{\triangle AOB}^2\le\frac{1}{4}a^2b^2,\quad 故\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\le S_{\triangle AOB}\le\frac{1}{2}ab$$

当且仅当$\theta=k\pi+\frac{\pi}{4}$,$\theta=k\theta(k\in z)$上式左右等号分别成立(证毕)。

研究解题方法,培养学生数学能力和创新意识,教学会生学习数学的方法,是本文的初衷。求函数值域及最值的题型多、技巧高、综合性强。在教学中需认真仔细分析各类题型的关键之处,扫清解题过程中的思维障碍,讲清楚知识间的来龙去脉和因果关系。一切要从学生认识出发,培养学生良好的审题习惯,归类题型的能力,善于从题目的条件与结论中发现知识的脉络,从暗示思维中层层递进分析,找出解决这类题型的解题途径。培养学生做完题后的反思和总结,真正领会解题的关键和思维的切入点,最终达到掌握此类问题的解题方法和策略。

Seeking Function And Maximum Value

AO Bing

(*Liangshan Minority Middle School*, *Xichang 615000*, *Sichuan*)

Abstract: Seeking function is an important examination question in math examination of college entrance examination. This article makes a systematic research on the common methods of seeking function value, such methods as direction, anti-function, differentiating, monotonousness of function, exchanging, inequation of equal value, constructing, derivative.

Key Words: Function value; Maximum value; Methods