方形对称传输线TE模的色散特征曲线的数值计算

钱　波[1]，卓　远[2]

（1.西昌学院　四川西昌　615000；2　重庆大学　重庆　400044）

摘　要：本文提出了一种计算方形对称传输线TE模的各模式的截止波数，以及根据各模式的截止波数计算各模式的色散曲线的方法。

关　键　词：方形对称传输线；TE模；色散曲线；数值计算；截止波数

中图分类号：O241　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1008-4169(2004)03-0087-03

方形传输线是一种特殊的导波系统，本文提出了一种计算方形对称传输线TE模的各模式的截止波数，以及根据各模式的截止波数计算各模式的色散曲线的方法，虽然该方法是一种对特殊的导波系统的计算，但该方法仍然适合一般的矩形传输线的导波系统的计算，在实际波导传模式传输设计中具有重要意义。

1　电磁场的偏微分方程形式（赫姆霍兹方程）及边界条件

由于要求的模式为TE模，因此纵向电场E_Z为零，只存在纵向磁场H_Z，赫姆霍兹方程为：$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+k_c^2\phi=0$，（$\phi$代表$H_Z$）。边界条件：在波导壁处，$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$。由Maxwell方程可以由电磁场的纵向分量求出横向分量，且$E_Z=0$，则：

$$H_x=\frac{1}{K_c^2}\left[i\omega\varepsilon\frac{\partial E_Z}{\partial y}-i\beta\frac{\partial H_Z}{\partial x}\right] \tag{1}$$

$$H_y=\frac{1}{K_c^2}\left[-i\omega\varepsilon\frac{\partial E_Z}{\partial x}-i\beta\frac{\partial H_Z}{\partial y}\right] \tag{2}$$

$$E_x=\frac{1}{K_c^2}\left[-i\beta\frac{\partial E_Z}{\partial x}-i\omega\mu\frac{\partial H_Z}{\partial y}\right] \tag{3}$$

$$E_y=\frac{1}{K_c^2}\left[-i\beta\frac{\partial E_Z}{\partial y}+i\omega\mu\frac{\partial H_Z}{\partial x}\right] \tag{4}$$

其中：$k_c^2=\omega^2\mu\varepsilon-\beta^2$为截止波数。

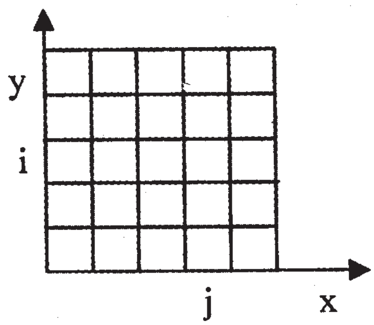

图 1

2　离散化场域

对方形传输线的波导的横截面用正方形网格予以划分，设y，x坐标及坐标原点和i，j对应关系、网格的划分及节点编号均如下图1所示。由于横截面为方形，为计算的简化，网格划分一般采用等步长的方型网格，这样可使网格和波导外边界重合。

3　差分格式及代数方程组

以图1为例，其余类似，采用“五点格式”，关于各个编号点差分方程计算方法分别如下：

（1）对网格内点（该点不在内外边界上），赫姆霍兹方程的差分格式为：

$$\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}-4\phi_{i,j}+(k_ch)^2\phi_{i,j}=0 \tag{5}$$

（2）对于外边界角上的4个角点，赫姆霍兹方程的差分格式为：

$$4\phi_{i,j}-2\phi_{i^*n,j+1}-2\phi_{i+1,j}=(k_ch)^2\phi_{i,j} \tag{6}$$

式中n为x方向划分的网格步长数（下同）。

收稿日期：2004-07-13

作者简介：钱波（1969—　），男，工程技术系讲师，主要从事电子微波等课程的教学和研究。

本文得到胡青龙老师的悉心指导，在此表示衷心感谢！

(3)对四周除角点外的边界上点，要求满足$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$的边界条件，可以在边界外侧设置一排虚设的网格点，使其值等于边界内侧的网格点。则赫姆霍兹方程的差分格式为：

$$4\phi_{i,j}-\phi_{(i-n),j}-2\phi_{i,j+1}-\phi_{(i+n),j}=(k_c h)^2\phi_{i,j} \quad (7)$$

(4)由于网格和波导外边界重合，故对于紧靠波导外边界的网格点，赫姆霍兹方程的差分格式为：

$$4\phi_{i,j}-\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}-\phi_{(i+n),j}-\phi_{(i-n),j}=(k_c h)^2\phi_{i,j} \quad (8)$$

(5)对于内边界线，为了满足边界条件，可在计算边界线上排点时，强行赋值使其值等于同列中边界线下排同列对应点的值，而对边界线下排的点仍按网格内点的差分格式计算。则赫姆霍兹方程的差分格式为：

$$\phi_{i,j}-\phi_{(i-2^*n),j}=0 \quad (9)$$

将上述各个差分格式分别应用于相应的节点，便可得到待求场量为未知数的n＊n个方程组，由此构成的差分方程组可用矩阵形式表示为：

$$[A]*[\phi]=(k_c h)^2[B]*[\phi] \quad (10)$$

式中$[A]$为以网格节点$(n*n)\times(n*n)$上的系数矩阵，$[\phi]$为以网格节点上的待求场量ϕ_i为分量的列向量，$[B]$为$(n*n)\times(n*n)$的对角线元素为0或1的对角线矩阵(非对角线元素全部为0)，即边界线上排点对应编号的对角线元素为0。因此求解变为求上述A、B矩阵的广义特征值与特征向量的问题，每个特征值对应$n*n$个特征向量，共有$n*n$个特征值，特征值从小到大依次对应从低到高的模式，一般只有最低2到3模式在实际中才有意义。实际计算中可用Matlab强大的数值计算功能求解。

电磁场的横向分量的差分方程组为：

$$E_x(i,j)=-\frac{1}{k_c^2}\frac{i\omega\mu}{2h} \quad (11)$$

$$E_y(i,j)=\frac{1}{k_c^2}\frac{i\omega\mu}{2h} \quad (12)$$

$$H_x(i,j)=-\frac{1}{k_c^2}\frac{i\beta}{2h} \quad (13)$$

$$H_y(i,j)=-\frac{1}{k_c^2}\frac{i\beta}{2h} \quad (14)$$

其中i,j分别代表y，x方向节点坐标。

4 实例计算

计算图2所示传输线最底两个TE模的色散特征曲线，设b=5mm，ρ=a/b，ρ的取值范围为0.3~0.7，实际计算中可取不同步长和ρ值进行计算，并对计算结果进行比较和分析，从而判断计算精度。

这里分别给出ρ=0.3、ρ=0.5以及ρ=0.7，即a=1.5mm、a=2.5mm、a=3.5mm、步长为0.5mm的计算结果。计算表明三种情况基模的截止频率与波数和横截面的电磁场分布完全相同，这里只给出a=1.5mm基模及次模的电磁场横截面图(图4至图6)。

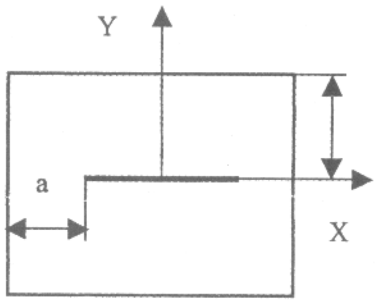

图2

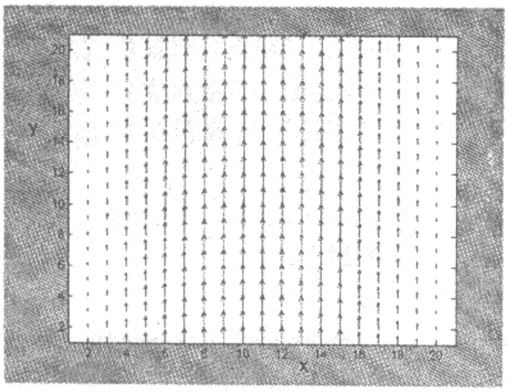

图3 基模的横截面电场分布图

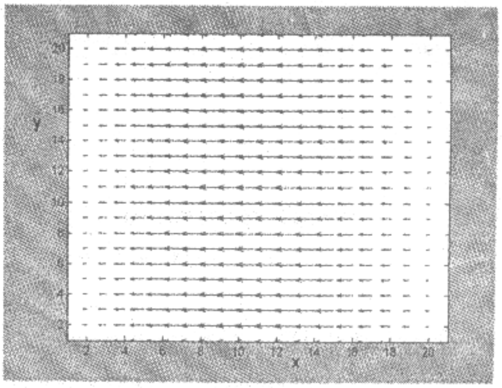

图4 基模的横截面磁场分布图

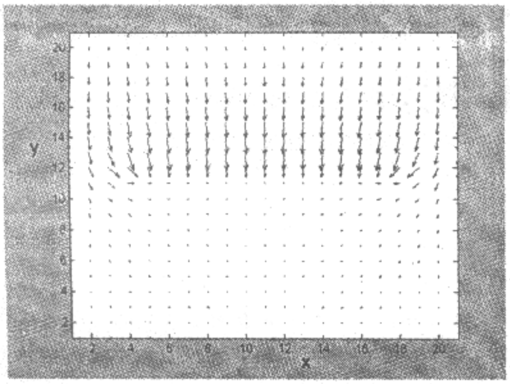

图5　次模的横截面电场分布图

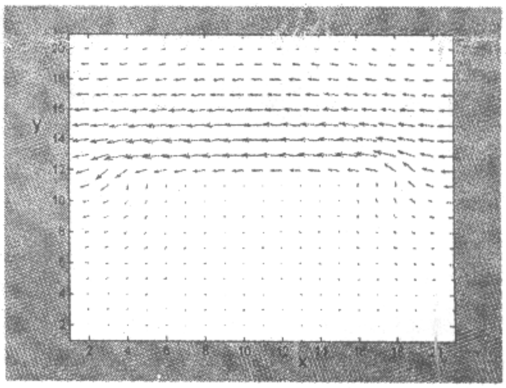

图6　次模有横截面磁场分布图

（1）当a=1.5mm，经计算最低的三个特征值分别为t1=0、t2=0.0246、t3=0.029由于t1=0对应的特征向量为常数，电磁场的横向分量全部为零，所以是伪解。因此基模和次模分别为t2=0.0246、t3=0.0293，由于$t=(k_{ch})^2$，所以基模和次模的截止波数分别为Kc2=313.8364、Kc3=342.6120，对应的截止频率分别为9.4086e+010Hz和1.0271e+011Hz。

（2）当a=2.5mm，经计算最低的三个特征值分别为t1=0、t2=0.0246、t3=0.0282。同样t1=0是伪解。基模和次模的截止波数分别为Kc2=313.8364、Kc3=335.7618，对应的截止频率分别为9.4086e+010Hz和1.0066e+011Hz。

（3）当a=3.5mm，经计算最低的三个特征值分别为t1=0、t2=0.0246、t3=0.0270。同样t1=0是伪解。基模和次模的截止波数分别为Kc2=313.8364、Kc3=328.8121，对应的截止频率分别为9.4086e+010Hz和9.8575e+010Hz。

根据上述计算不同a值所的基模和次模的截止波数，由色散公式：$k_c^2=k^2-k_Z^2$，可以得到色散曲线如图7。计算表明三种情况的色散曲线基模相同，次模不同。

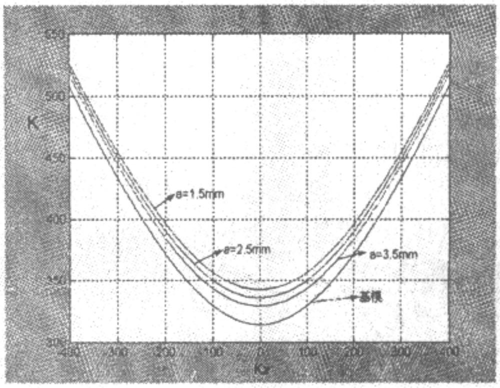

图7　色散曲线图

参考文献：

〔1〕谢处方.电磁场与电磁波.国防科技出版社，1998.8

〔2〕王秉中.计算电磁学.国防科技出版社，2002.8

〔3〕喻志远.导波场论.电子科技大学出版社.2000.8

Numerical Value Computation of Chromatic Dispersion Curves of TE Model of Square Symmetry Wire

QIAN Bo[1]，ZHUO Yuan[2]

(1.Xichang College，Xichang，Sichuan 615000；2.Chongqing University，Chongqing 400044)

Abstract：This paper puts forward a computation method on cut-frequency of all TE models of square symmetry wire by which chromatic dispersion curves can be drawn.

Key Words：Square Symmetry Wire； TE Model； Numerical Value Computation； Chromatic Dispersion Curves；Cut-frequency.