第 35 卷第 3 期　　西昌学院学报(自然科学版)　　Vol.35,No.3
2021 年 9 月　　Journal of Xichang University(Natural Science Edition)　　Sept.,2021

doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2021.03.024

统一框架下的柱面和锥面教学

李观荣

(岭南师范学院数学与统计学院,广东 湛江 524048)

摘　要:在直纹曲面的框架下统一了柱面、锥面方程的求法,统一了柱面、锥面判别定理的证明方法,统一了二次柱面、锥面的判别形式,从而把柱面和锥面放在统一的框架下进行教学。

关键词:解析几何;柱面;锥面;教学处理

中图分类号:O182.2-4　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-1891(2021)03-0119-04

On Teaching the Analytic Geometry of Cylinder and Cone in the Unified Frame

LI Guanrong

(School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang, Guangdong 524048, China)

Abstract: In the frame of ruled curve surface, we unified the method of obtaining the equations of cylinder and cone, unified the proof method of the discrimination theorem of cylinder and cone, and unified the discrimination forms of the quadratic cylinder and the quadratic cone. Thus the analytic geometry of cylinder and cone can be taught in a unified framework.

Keywords: analytic geometry; cylinder; cone; teaching method

0 引言

柱面和锥面是两类比较重要的曲面,它们在解析几何课程中占有比较重要的地位,也常常引起人们的研究兴趣。文献[1]建立二次直纹面的统一方程,并给出判定二次柱面和锥面的充分条件;文献[2]利用仿射变换工具,给出了一个新的柱面判定方法;文献[3]在母线给定的情况下,讨论了柱面方程表示的特征。这些研究主要集中在对柱面、锥面的方程求法和判定定理方面,对柱面、锥面的教学研究,特别是对教学内容的处理,则涉及较少。

在对柱面和锥面内容的处理上,一般的解析几何教材[4-7]都会把柱面和锥面分开讨论,也就是讨论完柱面的相关内容(如定义、求法、性质),再重新讨论锥面的相关内容。事实上,由于柱面、锥面均为直纹曲面,即其均可由一族直线生成,并且曲面方程的求法思路相同,因此在教学过程中,完全可以把柱面和锥面统一起来教学。当然,把两者统一起来,需要对教材做一些处理,特别是要把柱面、锥面的一些思想方法及形式统一起来。本文主要在直纹曲面的框架下统一了柱面、锥面方程的求法,统一了柱面、锥面判别定理的证明方法,统一了二次柱面和锥面的判别形式,从而把柱面和锥面放在统一的框架下进行教学。

1 统一柱面和锥面方程的求法

柱面和锥面均可看成由一族直线生成,同为直纹曲面,但它们又有差异。柱面是由一族平行直线生成,而锥面是由一族过定点的直线生成,具体见定义 1 和定义 2。

定义 1[4]　在空间中,由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫作柱面,定方向叫作柱面的方向,定曲线叫作柱面的准线,那族平行直线中的每一条直线,都叫作柱面的母线。

定义 2[4]　在空间中,通过一定点且与定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫作锥面,这些直线都叫作锥面的母线,那个定点叫作锥面的顶点,定曲线叫作锥面的准线。

由定义 1 和定义 2 可知,柱面和锥面可以由一

收稿日期:2021-04-12
基金项目:广东省高等教育教学改革项目(粤教高函〔2018〕1 号)。
作者简介:李观荣(1979—),男,广东湛江人,副教授,博士,研究方向:计算数学。

条直线按照某种运动规律生成。柱面是由一条直线沿着准线作平行运动生成,它是由一簇平行直线生成的曲面。锥面是由通过顶点且沿着准线的直线生成,它是由一族过定点的直线生成的曲面。在导出这 2 种曲面的方程时,可把其方法统一起来。为此,假设曲面的准线方程为

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}。$$

这样,求柱面和锥面的方法可以统一如下。

1)设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为曲面上任一点,写出过 M_1 的母线方程为

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0\\\varphi_2(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0\end{cases}\tag{1}$$

以上方程实际上是以 x_1,y_1,z_1 为参数的参数方程,该参数方程实际上就是生成曲面的那族直线的方程。

2)由于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上一点,故参数 x_1,y_1,z_1 应满足的以下约束条件

$$\begin{cases}F_1(x_1,y_1,z_1)=0\\F_2(x_1,y_1,z_1)=0\end{cases}\tag{2}$$

3)由式(1)(2)可消去 3 个参数 x_1,y_1,z_1,从而得到所求的曲面方程。

对于柱面方程和锥面方程的求法,实际上它们差异仅在式(1)的具体形式上。如果柱面的方向为 m,n,l,则式(1)可用直线方程的标准方程形式表示如下:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{l}。$$

对于锥面方程,假设其顶点为 $A(x_0,y_0,z_0)$,则式(1)可用直线方程的标准方程形式表示如下:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}。$$

例 1　已知柱面的准线为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x+y+z=0\end{cases}$,母线平行于 X 轴,求这个柱面方程。

解:设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上一点,则过 M_1 的母线方程为

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{0}\tag{3}$$

由于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上一点,故参数 x_1,y_1,z_1 应满足以下约束条件

$$\begin{cases}{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2=25\\x_1+y_1+z_1=0\end{cases}\tag{4}$$

由式(3)(4)消去参数 x_1,y_1,z_1 得柱面方程

$$(y+z)^2+y^2+z^2=25。$$

例 2　已知锥面的顶点在原点,且准线为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\z=5,\end{cases}$ 求这个锥面方程。

解:设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上一点,则过 M_1 的母线方程为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}\tag{5}$$

由于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为准线上一点,故参数 x_1,y_1,z_1 应满足以下约束条件

$$\begin{cases}\dfrac{{x_1}^2}{4}+\dfrac{{y_1}^2}{9}=1\\z_1=5\end{cases}\tag{6}$$

由式(5)(6)消去参数 x_1,y_1,z_1 得锥面方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=0。$$

通过把柱面和锥面的求法统一起来,一方面可以让学生更好地把握柱面和锥面的本质以及它们之间的联系,另一方面也可以使学生更好地掌握柱面方程和锥面方程的求法。

2 统一判别定理的证明方法

在解析几何的教材中,通常会介绍柱面和锥面的一些判别定理,但这些定理的证明通常采取不同的证明方法。事实上,不管柱面还是锥面,其本质均是由一族具有某种特征性质的直线生成。对于柱面,该族直线的特征性质是所有直线的方向一致;对于锥面,该族直线的特性性质则是所有直线均通过定点。根据柱面和锥面的特征性质,可以很容易地证明教材中的一些判别定理,这些证明方法可以统一成以下 3 个步骤:

第 1 步:任取曲面上一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$。

第 2 步:根据直线族的特征性质,写出过 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 的直线方程。

第 3 步:验证过 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 的直线方程完全落在曲面上,从而验证曲面是柱面或是锥面。

下面,利用以上 3 个步骤去证明解析几何教材中的的一些判定定理。

定理 1[4]　在空间直角坐标系中,只含有 2 个元(坐标)的三元方程所表示的曲面是一柱面,它的母线平行于所缺元的同名坐标轴。

证明:仅证明方程

$$F(x,y)=0\tag{7}$$

表示的曲面是一个柱面,而且它的母线平行于 Z

轴。根据第 1 步,首先假设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为曲面上任意一点,即 $F(x_1,y_1)=0$.则过 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 并且平行于 Z 轴的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1} \tag{8}$$

由式(8)可得 $x_1=x,y_1=y$,再结合 $F(x_1,y_1)=0$,可得 $F(x,y)=0$,这样,直线(8)完全落在曲面上,即曲面是由一族平行于 Z 轴的直线生成,故为柱面。

利用该方法,还可以证明以下柱面定理。

定理 2[4]　方程

$$F(\frac{x}{l}-\frac{y}{m},\frac{y}{m}-\frac{z}{n},\frac{z}{n}-\frac{x}{l})=0$$

表示的曲面为母线平行于直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ 的柱面。

证明:设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为曲面上任意一点,即

$$F(\frac{x_1}{l}-\frac{y_1}{m},\frac{y_1}{m}-\frac{z_1}{n},\frac{z_1}{n}-\frac{x_1}{l})=0 \tag{9}$$

则过 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 且平行于 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \tag{10}$$

由式(10)可得

$$\frac{x}{l}-\frac{y}{m}=\frac{x_1}{l}-\frac{y_1}{m},$$

$$\frac{y}{m}-\frac{z}{n}=\frac{y_1}{m}-\frac{z_1}{n},$$

$$\frac{z}{n}-\frac{x}{l}=\frac{z_1}{n}-\frac{x_1}{l}。$$

再结合式(9),可得

$$F(\frac{x}{l}-\frac{y}{m},\frac{y}{m}-\frac{z}{n},\frac{z}{n}-\frac{x}{l})=0,$$

即整条直线(10)均落在曲面上,即曲面是由一族平行于 Z 轴的直线生成,故为柱面。

利用上述第 1 步至第 3 步,同样可证明以下锥面判定定理。

定理 3[4]　一个关于 x,y,z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面。

证明:首先,证明曲面过原点。

设关于 x,y,z 的齐次方程为

$$F(x,y,z)=0。$$

根据齐次方程的定义有

$$F(tx,ty,tz)=t^{\lambda}F(x,y,z),$$

所以当 $t=0$ 时,有

$$F(0,0,0)=0,$$

因此曲面过原点。

其次,利用上述第 1 步至第 3 步,进一步证明曲面为锥面。设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为曲面上异于原点 $O(0,0,0)$ 的任意一点,则

$$F(x_1,y_1,z_1)=0。$$

直线 OM_1 的方程为

$$\begin{cases}x=x_1t\\ y=y_1t\\ z=z_1t\end{cases} \tag{11}$$

式中:t 为参数。

故 $F(x,y,z)=F(tx_1,ty_1,tz_1)=t^{\lambda}F(x_1,y_1,z_2)=0$,即整条直线 OM_1 均落在曲面上,即曲面是由一族经过定点 $O(0,0,0)$ 的直线生成,故为锥面。

3 统一二次柱面和锥面的判定形式

二次柱面和锥面是一类比较特殊的曲面,其特点是它们均可以看出是由一族直线生成,并且方程均为二次方程,由于这些特点,使得这些曲面具有很好的性质。事实上,可以在同一的框架下去讨论二次柱面和锥面的判定。

定理 4　假设二次曲面方程可化成如下形式

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)-(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0 \tag{12}$$

命题Ⅰ　若 $D_1=D_2=D_3=D_4$,则式(12)表示的曲面为锥面。

命题Ⅱ　对参数 ω,μ(ω,μ 不全为零),若比例

$$\begin{vmatrix}\omega A_1-\mu A_3 & \omega B_1-\mu B_3\\ \mu A_2-\omega A_4 & \mu B_2-\omega B_4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\omega B_1-\mu B_3 & \omega C_1-\mu C_3\\ \mu B_2-\omega B_4 & \mu C_2-\omega C_4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\omega C_1-\mu C_3 & \omega A_1-\mu A_3\\ \mu C_2-\omega C_4 & \mu A_2-\omega A_4\end{vmatrix},$$

与 ω,μ 无关,则(12)表示的曲面为柱面。

证明:由文献[1,4]可知,方程(12)与以下方程等价

$$\begin{cases}\omega(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=\mu(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)\\ \mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=\omega(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)\end{cases} \tag{13}$$

即式(12)的曲面可以由式(13)的直线族生成。若 $D_1=D_2=D_3=D_4$,则式(13)的直线族经过定点(0,0,0),根据锥面的定义可知式(13)的直线族生成的曲面为锥面,其顶点为坐标原点,故命题Ⅰ成立。

对固定的 ω,μ,直线(13)的方向数为

$$\begin{vmatrix}\omega B_1-\mu B_3 & \omega C_1-\mu C_3\\ \mu B_2-\omega B_4 & \mu C_2-\omega C_4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\omega C_1-\mu C_3 & \omega A_1-\mu A_3\\ \mu C_2-\omega C_4 & \mu A_2-\omega A_4\end{vmatrix}:$$

$$\begin{vmatrix} \omega A_1-\mu A_3 & \omega B_1-\mu B_3 \\ \mu A_2-\omega A_4 & \mu B_2-\omega B_4 \end{vmatrix},$$

若以上比例与参数 ω,μ 无关,则式(13)的直线族为一族平行直线,即式(12)的曲面可看成由一族平行直线生成,根据柱面的定义可知式(12)的曲面为柱面,故命题Ⅱ成立。

例 3　证明方程

$$(x-z)^2+(y+z-1)^2=1 \tag{15}$$

表示的曲面为柱面。

证明:由方程(15)可知曲面为二次曲面,并且此方程可化为以下形式

$$(x-z)(x-z)-(y+z)(2-y-z)=0。$$

由定理 4 可知

$$A_1=A_2=1,B_1=B_2=0,C_1=C_2=-1,A_3=A_4=0,B_3=1,$$
$$B_4=-1,C_3=1,C_4=-1。$$

对任意不全为零的参数 ω,μ,

$$\begin{vmatrix} \omega A_1-\mu A_3 & \omega B_1-\mu B_3 \\ \mu A_2-\omega A_4 & \mu B_2-\omega B_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \omega B_1-\mu B_3 & \omega C_1-\mu C_3 \\ \mu B_2-\omega B_4 & \mu C_2-\omega C_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \omega C_1-\mu C_3 & \omega A_1-\mu A_3 \\ \mu C_2-\omega C_4 & \mu A_2-\omega A_4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \omega & -\mu \\ \mu & \omega \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -\mu & -\omega-\mu \\ \omega & -\mu+\omega \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -\omega-\mu & \omega \\ -\mu+\omega & \mu \end{vmatrix}$$

$$=1:1:(-1),$$

故由定理 4 可知原方程表示的曲面为二次曲面。

4 结语

柱面和锥面是解析几何中两类比较重要的曲面,它们都是直纹曲面。本文主要在直纹曲面的框架下讨论了柱面、锥面方程的求法以及柱面、锥面的判定,从而统一了柱面、锥面方程求法,统一了判别定理的证明方法,统一了二次柱面、锥面的判别形式。通过对这些内容的统一,一方面可以让学生从较高的角度去把握柱面和锥面的相关内容;另一方面也可以为教师节省不少教学时间。事实上,在具体的教学过程中,对教材做这样的统一处理,确实收到良好的教学效果。

参考文献:

[1]　熊宗洪,王燕红,王守财,等.二次直纹曲面的统一方程及柱面和锥面的判定[J].萍乡学院学报,2015,32(3):5-7.
[2]　潘朝毅.一种新的柱面判别方法[J].成都师范学院学报,2016,32(5):117-119.
[3]　何国庆.柱面方程的一点注记[J].高等数学研究,2012,15(2):12.
[4]　吕林根,许子道.解析几何[M].4 版.北京:高等教育出版社,2006.
[5]　吕杰,陈奇斌,李健全,等.解析几何[M].北京:科学出版社,2009.
[6]　李养成.空间解析几何[M].北京:科学出版社,2009.
[7]　石勇国,彭家寅.解析几何[M].北京:科学出版社,2014.

(上接第 102 页)

[3]　刘荣玄.对称熵损失下 Burr XⅡ分布族形状参数和失效率函数的 Bayes 估计[J].数理统计与管理,2014,32(6):434-440.
[4]　季海波.逐步首失效样本下 Burr Ⅻ分布参数的 Bayes 估计[J].青海师范大学学报,2019(4):55-58.
[5]　王晓红,宋立新.定时截尾数据 Pareto 分布参数的 Bayes 估计[J].辽宁工程技术大学学报,2013,32(2):245-248.
[6]　刘荣玄,邬四英,王新长. Pareto 分布在定时截尾样本下的估计问题[J].井冈山大学学报(自然科学版),2017,38(3):6-12.
[7]　刘银萍,张雨婷,秦青.定时截尾情形下指数分布参数的估计[J].吉林师范大学学报(自然科学版),2014,35(3):68-70.
[8]　龙兵,朱全新,刁长新.定时截尾缺失数据样本下 Lomax 分布总体形状参数估计与检验[J].郑州大学学报(理学版),2017,49(2):19-24.
[9]　薛娇,常胜,邓丽.定时截尾样本下两参数指数-威布尔分布的可靠性 Bayes 估计[J].重庆理工大学学报(自然科学版),2014,28(8):132-139.
[10]　谭玲.定时截尾情形下 Burr 分布参数的 Bayes 估计[J].苏州大学学报,2011,27(3):1-4.
[11]　龙兵.双边定时截尾下 Burr XⅡ分布的参数估计[J].兰州理工大学学报,2018,44(6):158-162.
[12]　茆诗松,王静龙,濮小龙.高等数理统计[M].北京:高等教育出版社,2000:116-118.