doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2021.03.020

定时截尾情形下 Burr Ⅻ分布的参数估计及其检验

刘 华

(荆楚理工学院数理学院,湖北 荆门 448000)

摘 要:在定时截尾情形下,讨论了 Burr Ⅻ分布的形状参数、可靠度和失效率的极大似然估计,给出了极大似然估计的表达式,证明了极大似然估计的相合性和渐进正态性,并给出它的近似区间估计和假设检验公式,最后进行了参数估计的数值模拟。结果表明:形状参数的极大似然估计效果良好。

关键词:定时截尾;Burr Ⅻ分布;极大似然估计;相合性;渐进正态性

中图分类号:O212.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-1891(2021)03-0098-05

Parameter Estimation and Hypothesis Testing of Burr Ⅻ Distribution under Type Ⅰ Censored Samples

LIU Hua

(School of Mathematics and Physics, Jingchu University of Technology, Jingmen, Hubei 448000, China)

Abstract: The maximum likelihood estimation of the shape parameter, reliability and failure rate on Burr Ⅻ distribution is discussed under type Ⅰ censored samples, the expression of the maximum likelihood estimation is given, the consistency and asymptotic normality of the estimations are proved, its approximate interval estimation and hypothesis test formula are given, and finally, the numerical simulation of parameter estimations is carried out. The result shows that the maximum likelihood estimation of the shape parameter is effective.

Keywords: type-Ⅰ censored sample; Burr Ⅻ distribution; maximum likelihood estimation; consistency; asymptotic normality

0 引言

Burr Ⅻ分布是 Burr 在 1942 年研究微分方程 $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=F(x)(1-F(x))g(x,F(x))$ 引入的一个函数,该分布具有偏态、厚尾的特点,已在质量控制、保险精算和可靠性等领域得到广泛的应用,用它拟合某些产品的寿命分布是比较切合实际的,因此受到许多统计学家和学者的广泛关注,并对其性质进行了深入的探讨。李俊华等[1]研究了全样本下 Burr Ⅻ分布的形状参数在复合 Mlinex 下的贝叶斯估计、E-贝叶斯估计和多层贝叶斯估计,并通过数值模拟说明了形状参数的贝叶斯估计的稳健性和精确性;郭红莹[2]在双边定数截尾样本下,对 Burr Ⅻ分布形状参数在 q-对称熵损失下和复合 Linex 对称损失下的贝叶斯估计和多层贝叶斯估计;刘荣玄[3]基于逐次定数截尾样本下研究了 Burr Ⅻ分布的形状参数和失效率函数在对称熵损失下考虑不同的先验分布的贝叶斯估计,结果表明取共轭先验分布较无信息下先验分布效果好;季海波[4]讨论逐步首失效样本下 Burr Ⅻ分布的形状参数在均方损失和 Linex 损失下的贝叶斯估计,模拟结果表明贝叶斯估计的优越性。上述研究参数估计采用的截尾方式都是第Ⅱ类型的截尾,第Ⅰ类型的定时截尾也是研究寿命分布的常用截尾方法。文献[5-9]研究了截尾类型为定时截尾下其他分布的参数估计问题,虽然谭玲[10]研究了定时截尾情形下 Burr Ⅻ分布形状参数的估计,但是主要研究在熵损失下形状参数的贝叶斯估计。龙兵[11]研究了双边定时截尾样本下形状参数的估计,主要借助 EM 算法得到形状参数的迭代公式和渐进方差。本文拟在定时截尾情形下利用极大似然法给出 Burr Ⅻ分布形

收稿日期:2020-08-21
基金项目:荆楚理工学院校级科研项目(PY202002);荆楚理工学院大学生创新创业训练项目(KC2021002)。
作者简介:刘华(1979—),女,湖北十堰人,讲师,硕士,研究方向:数理统计。

状参数、可靠度和失效率的估计,并证明形状参数的极大似然估计具有相合性和渐进正态性,然后给出形状参数、可靠度和失效率的置信区间和检验,最后进行了随机模拟。

1 极大似然估计及其相合性

1.1 参数 θ 的极大似然估计

设 X 为服从 Burr Ⅻ分布的随机变量,其分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$ 分别为

$$F(x) = 1 - (1 + x^{\alpha})^{-\theta} \quad (x > 0),$$

$$f(x) = \theta\alpha x^{\alpha-1}(1 + x^{\alpha}) - (\theta + 1)(x > 0),$$

式中:α 为刻度参数,且 $\alpha>0$;θ 为形状参数,且 $\theta>0$。

一些生存函数比如可靠性、平均剩余寿命、平均寿命失效时间和危险率在许多工程中都是非常有用的,Burr Ⅻ分布的可靠度 $R(x)$ 和失效率 $\lambda(x)$ 分别为:

$$R(x) = 1 - F(x) = (1 + x^{\alpha})^{-\theta},$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{(1 + x^{\alpha})}{\theta\alpha x^{\alpha-1}}。$$

定时截尾寿命试验的具体方案为:对 Burr Ⅻ分布总体进行 n 次独立观测,并到时间 T_0 时停止,每个样本值以概率 p 被观测到,以概率 $1-p$ 缺失 。用 $(z_i,\delta_i,\beta_i)(i = 1,2,\cdots,n)$ 表示总体样本值,其中 $z_i = \min\{T_0,x_i\}$,x_i 表示第 i 个样本的寿命,令 $\beta_i = I_{\{x_i\leq T_0\}} - I_{\{x_i>T_0\}}$,即当观察到具体的失效时间时 $\beta_i = 1$,否则 $\beta_i =- 1$,并且第 i 个样品观测值缺失时 $\delta_i = 0$, 否则 $\delta_i = 1$。

参数估计在研究任意分布中都是至关重要的,极大似然估计由于其简单直观,通常是估计任意分布参数的起点。现设 Burr Ⅻ分布的刻度参数 α 已知,下面求参数 θ 在定时截尾情形下的极大似然估计,基于定时截尾情形下的样本观测值为 (z_i,δ_i,β_i) ,其中 $i = 1,2,\cdots,n$,此时似然函数 $L(\theta)$ 为:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i)^{A_i}(1 - F(z_i))^{B_i} =$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\theta\alpha z_i^{\alpha-1}(1 + z_i^{\alpha})^{-\theta-1}\right]^{A_i}\left[(1 + z_i^{\alpha})^{-\theta}\right]^{B_i},$$

式中:$A_i = \beta_i\delta_i(\beta_i\delta_i + 1)/2, B_i = \beta_i\delta_i(\beta_i\delta_i - 1)/2$。

对上述似然函数取对数求导,并令 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 0$,得:

$$\hat{\theta}_M = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{\sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i)\ln(1 + z_i^{\alpha})} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i\delta_i + \beta_i^2\delta_i^2)}{2\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\delta_i^2\ln(1 + z_i^{\alpha})}。$$

1.2 可靠度和失效率的极大似然估计

由极大似然估计的不变性知可靠度和失效率的极大似然估计可以通过用 $\hat{\theta}_M$ 替换 1.1 中可靠度和失效率表示式中的 θ 得到:

$$\hat{R}_M = (1 + x^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M},$$

$$\hat{\lambda}_M = \frac{(1 + x^{\alpha})}{\hat{\theta}_M\alpha x^{\alpha-1}}。$$

1.3 参数 θ 的极大似然估计的相合性

定理 1　若 $(z_i,\delta_i,\beta_i), i = 1,2,\cdots,n$ 是来自 Burr Ⅻ分布的定时截尾样本观测值,参数 θ 和其极大似然估计 $\hat{\theta}_M$ 满足 $\hat{\theta}_M \xrightarrow{a.s} \theta$ 。

证明:由随机变量序列 $\{\beta_i\delta_i, 1\leq i\leq n\}$ 是独立同分布的且期望存在,满足强大数定律,即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\delta_i \xrightarrow{a.s} E(\beta_i\delta_i),$$

其中,$E(\beta_i\delta_i)=E(\beta_i)E(\delta_i)=p[1-2(1 + T_0^{\alpha})^{-\theta}]$,从而

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\delta_i \xrightarrow{a.s} p[1 - 2(1 + T_0^{\alpha})^{-\theta}],$$

而 $E(\beta_i^2\delta_i^2) = E(\beta_i^2)E(\delta_i^2) = p$, $E(\beta_i^2\delta_i^2\ln(1 + z_i^{\alpha})) = \frac{p}{\theta}[1 - (1 + T_0^{\alpha})^{-\theta}]$ 。

由 Slusky 定理可知:

$$\hat{\theta}_M = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i\delta_i + \beta_i^2\delta_i^2)}{2\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\delta_i^2\ln(1 + z_i^{\alpha})} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\beta_i\delta_i + \beta_i^2\delta_i^2)}{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\delta_i^2\ln(1 + z_i^{\alpha})}$$

$$\xrightarrow{a.s} \frac{p[1 - 2(1 + T_0^{\alpha})^{-\theta}] + p}{2\frac{p}{\theta}[1 - (1 + T_0^{\alpha})^{-\theta}]} = \theta。$$

1.4 参数 θ 的极大似然估计的渐进正态性

引理 1[12]　记 $T_n = (T_{1n},T_{2n},\cdots,T_{kn})^T, \theta = (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)^T, \sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{L} N(0,\sum)$,其中 $\sum = (\sigma_{ij})_{k\times k}$,又设 $g(t_1,t_2,\cdots,t_k)$ 存在连续偏导数,则当 $n\to\infty$时,有

$$\sqrt{n}[g(T_{1n},T_{2n},\cdots,T_{kn}) - g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)] \xrightarrow{L} N(0,\sigma^2(\theta)),$$

其中 $\sigma^2(\theta)=\sum\sum \frac{\partial g}{\partial\theta_i}\frac{\partial g}{\partial\theta_j}\cdot\sigma_{ij}$。

定理 2 在前述条件和记号下,$\sqrt{n}(\hat{\theta}_M-\theta)\xrightarrow{L}N(0,\frac{\theta^2}{P[1-(1+T_0^\alpha)^{-\theta}]})$。

证明:令 $w_i=(\beta_i\delta_i,\beta_i^2\delta_i^2,\beta_i^2\delta_i^2\ln(1+z_i^\alpha))$,则 $\{w_i,i\geqslant 1\}$ 为独立同分布随机变量序列,且 $Ew_1=\left(p[1-2(1+T_0^\alpha)^{-\theta}],p,\frac{p}{\theta}[1-(1+T_0^\alpha)^{-\theta}]\right)$。

令 $\sum=\mathrm{E}(\mathrm{w}_1-E(w_1))(\mathrm{w}_1-E(w_1))^T=(\sigma_{ij})_{3\times3}$,由多元中心极限定理知:

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n w_i-E(w_1)\right)\xrightarrow{L}N(0,\sum)。$$

为计算 $\sum=(\sigma_{ij})_{3\times3}$,需计算下列期望:

$$E(\beta_1^3\ln(1+z_1^\alpha))=$$
$$E\left(\begin{cases}\ln(1+x_1^\alpha),x_1\leqslant T_0\\-\ln(1+T_0^\alpha),x_1>T_0\end{cases}\right)=$$
$$\int_0^{T_0}\ln(1+x_1^\alpha)\theta\alpha x_1^{\alpha-1}(1+x_1^\alpha)^{-\theta-1}\mathrm{d}x_1+$$
$$\int_{T_0}^\infty-\ln(1+T_0^\alpha)\theta\alpha x_1^{\alpha-1}(1+x_1^\alpha)^{-\theta-1}\mathrm{d}x_1=$$
$$\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta}(1+T_0^\alpha)^{-\theta}-2(1+T_0^\alpha)^{-\theta}\ln(1+T_0^\alpha),$$
$$E(\beta_1^2(\ln(1+z_1^\alpha))^2)=E(\ln^2(1+z_1^\alpha))=$$
$$\int_0^{T_0}\ln^2(1+x_1^\alpha)\theta\alpha x_1^{\alpha-1}(1+x_1^\alpha)^{-\theta-1}\mathrm{d}x_1+$$
$$\int_{T_0}^\infty\ln^2(1+T_0^\alpha)\theta\alpha x_1^{\alpha-1}(1+x_1^\alpha)^{-\theta-1}\mathrm{d}x_1=$$
$$\frac{2}{\theta}\left[\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta}(1+T_0^\alpha)^{-\theta}-(1+T_0^\alpha)^{-\theta}\ln(1+T_0^\alpha)\right]。$$

从而 $\sum=(\sigma_{ij})_{3\times3}$ 的每个元素为:

$$\sigma_{11}=E(\beta_1^2\delta_1^2)-[E(\beta_1\delta_1)]^2=$$
$$p-p^2[(1-2(1+T_0^\alpha)^{-\theta}]^2,$$
$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=E(\beta_1^3\delta_1^3)-E(\beta_1\delta_1)E(\beta_1^2\delta_1^2)=$$
$$(p-p^2)[(1-2(1+T_0^\alpha)^{-\theta}],$$
$$\sigma_{13}=\sigma_{31}=E(\beta_1^3\delta_1^3\ln(1+z_1^\alpha))-$$
$$E(\beta_1\delta_1)E(\beta_1^2\delta_1^2\ln(1+z_1^\alpha))$$
$$=p\left[\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta}(1+T_0^\alpha)^{-\theta}-2(1+T_0^\alpha)^{-\theta}\ln(1+T_0^\alpha)\right]-\frac{p^2}{\theta}(1-2(1+T_0^\alpha)^{-\theta})(1-(1+T_0^\alpha)^{-\theta}),$$
$$\sigma_{22}=E(\beta_1^4\delta_1^4)-[E(\beta_1^2\delta_1^2)]^2=p-p^2,$$
$$\sigma_{23}=\sigma_{32}=E(\beta_1^4\delta_1^4\ln(1+z_1^\alpha))-$$
$$E(\beta_1^2\delta_1^2)E(\beta_1^2\delta_1^2\ln(1+z_1^\alpha))=\frac{p}{\theta}[1-(1+T_0^\alpha)^{-\theta}]-$$
$$\frac{p^2}{\theta}[1-(1+T_0^\alpha)^{-\theta}],$$
$$\sigma_{33}=E(\beta_1^4\delta_1^4[\ln(1+z_1^\alpha)]^2)-$$
$$[E(\beta_1^2\delta_1^2\ln(1+z_1^\alpha))]^2=$$
$$\frac{2p}{\theta}\left[\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta}(1+T_0^\alpha)^{-\theta}-2(1+T_0^\alpha)^{-\theta}\ln(1+T_0^\alpha)\right]-\frac{p^2}{\theta^2}[1-(1+T_0^\alpha)^{-\theta}]^2,$$

令 $g(t_1,t_2,t_3)=\frac{t_1+t_2}{2t_3}$,$T_{1n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\beta_i\delta_i$,$T_{2n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\beta_i^2\delta_i^2$,$T_{3n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\beta_i^2\delta_i^2\ln(1+z_i^2)t_1=$

$$p[1-2(1+T_0^\alpha)^{-\theta}],\ t_2=p,\ t_3=\frac{p}{\theta}[1-(1+T_0^\alpha)^{-\theta}]。$$

则有 $g(T_{1n},T_{2n},T_{3n})=\hat{\theta}$,$g(t_1,t_2,t_3)=\theta$,且 $\hat{\theta}\xrightarrow{a.s}\theta$。

又 $\frac{\partial g}{\partial t_1}=\frac{1}{2t_3},\frac{\partial g}{\partial t_2}=\frac{1}{2t_3},\frac{\partial g}{\partial t_3}=-\frac{t_1+t_2}{2t_3^2}=-\frac{\theta}{t_3}$,由引理 1 知:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)=\sqrt{n}\begin{bmatrix}g(T_{1n},T_{2n},T_{3n})-\\g(t_1,t_2,t_3)\end{bmatrix}\xrightarrow{L}$$
$$N(0,\sigma^2),$$

其中 $\sigma^2=(\frac{\partial g}{\partial t_1},\frac{\partial g}{\partial t_2},\frac{\partial g}{\partial t_3})\sum(\frac{\partial g}{\partial t_1},\frac{\partial g}{\partial t_2},\frac{\partial g}{\partial t_3})^T=\frac{\theta^2}{p[1-(1+T_0^\alpha)^{-\theta}]}$。

2 参数区间估计与假设检验

2.1 参数区间估计

定理 3 在前面的记号下,如果 $\hat{\theta}_M$ 为 Burr Ⅻ分布参数 θ 的极大似然估计,对 $0<\gamma<1$ 时,则 θ 的置信水平为 $1-\gamma$ 的近似置信区间为:

$$\left(\hat{\theta}_M-Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M^2}{np[1-(1+T_0^\alpha)^{-\hat{\theta}_M}]}},\right.$$
$$\left.\hat{\theta}_M+Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M^2}{np[1-(1+T_0^\alpha)^{-\hat{\theta}_M}]}}\right)$$

证明:由定理 1 和定理 2 的结论:$\hat{\theta}_M\xrightarrow{a.s}\theta$ 和

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_M - \theta) \xrightarrow{L} N(0, \dfrac{\theta^2}{P[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\theta}]})$,从而

$$\frac{\sqrt{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}(\hat{\theta}_M - \theta)}{\hat{\theta}_M} \xrightarrow{L} N(0,1),$$

就有:$P(-Z_{\frac{\gamma}{2}} < \dfrac{\sqrt{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}(\hat{\theta}_M - \theta)}{\hat{\theta}_M} < Z_{\frac{\gamma}{2}}) \approx 1-\gamma$,其中 $Z_{\frac{\gamma}{2}}$ 为标准正态分布的上分位点。故

$$P\left(\hat{\theta}_M - Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M^2}{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}} < \theta < \hat{\theta}_M + Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M^2}{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}}\right) \approx 1-\gamma。$$

因此 θ 的置信水平为 $1-\gamma$ 的置信区间为:

$$\left(\hat{\theta}_M - Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M{}^2}{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}},\ \hat{\theta}_M + Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M{}^2}{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}}\right)。$$

类似的由于 Burr Ⅻ分布的可靠度 $R(x) = (1+x^{\alpha})^{-\theta}$ 和失效率 $\lambda(x) = \dfrac{1}{\theta\alpha x^{\alpha-1}(1+x^{\alpha})^{-1}}$ 是 θ 的单调递减的函数,故有下列定理。

定理 4　在前面的条件和记号下,如果 $\hat{\theta}_M$ 为 Burr Ⅻ分布参数 θ 的极大似然估计,对 $0<\gamma<1$ 时,则可靠度的置信水平为 $1-\gamma$ 的近似置信区间为:$((1+x^{\alpha})^{-\hat{\theta}_U}, (1+x^{\alpha})^{-\hat{\theta}_L})$,失效率的置信水平为 $1-\gamma$ 的近似置信区间为:

$$\left(\frac{(1+x^{\alpha})}{\hat{\theta}_U\alpha x^{\alpha-1}}, \frac{(1+x^{\alpha})}{\hat{\theta}_L\alpha x^{\alpha-1}}\right),$$

其中 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_M - Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{\theta}_M^2}{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}}$,$\hat{\theta}_U =$

$$\hat{\theta}_M + Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_M^2}{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}}。$$

2.2 参数假设检验

1)对于双侧假设检验问题:$H_0:\theta=\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta \neq \theta_0$,其中 θ_0 已知,当 H_0 为真时,

$$\frac{\sqrt{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}(\hat{\theta}_M - \theta_0)}{\hat{\theta}_M} \xrightarrow{L} N(0,1)。$$

给定显著水平 $\gamma(0<\gamma<1)$,检验的拒绝域为:

$$W_1 = \left\{(\beta_i,\delta_i,\alpha_i), i=1,2,\cdots,n \;\middle|\; \left|\frac{\sqrt{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}(\hat{\theta}_M - \theta_0)}{\hat{\theta}_M}\right| \geqslant Z_{\frac{\gamma}{2}}\right\}。$$

2)对于左侧假设检验问题:$H_0:\theta \geqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta<\theta_0$,其中 θ_0 已知,给定显著水平 $\gamma(0<\gamma<1)$,同理可知,检验的拒绝域为:

$$W_1 = \left\{(\beta_i,\delta_i,\alpha_i), i=1,2,\cdots,n \;\middle|\; \frac{\sqrt{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}(\hat{\theta}_M - \theta_0)}{\hat{\theta}_M} \leqslant Z_{\gamma}\right\}。$$

3)对于右侧假设检验问题:$H_0:\theta \leqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta > \theta_0$,其中 θ_0 已知,给定显著水平 $\gamma(0<\gamma<1)$,同理可知,检验的拒绝域为:

$$W_1 = \left\{(\beta_i,\delta_i,\alpha_i), i=1,2,\cdots,n \;\middle|\; \frac{\sqrt{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}(\hat{\theta}_M - \theta_0)}{\hat{\theta}_M} \geqslant Z_{\gamma}\right\}。$$

3 随机模拟

借助 Matlab 软件用随机模拟的方法产生服从 Burr Ⅻ分布的定时截尾样本求形状参数 θ 的极大似然估计和区间估计的步骤如下:

第 1 步:定义输入参数。Burr Ⅻ分布变量 X 的参数(形状参数 θ,刻度参数 α,样本容量 n);定时截尾的时间为 T_0;样本被观测到的概率 $P=0.9$,近似置信水平为 $1-\gamma=0.95$。

第 2 步:由 $(0,1)$ 上均匀分布的样本 U_i 生成 Burr Ⅻ分布随机数样本 $X_i = [(1-U_i)^{-\frac{1}{\theta}} - 1]^{\frac{1}{\alpha}}$。由另一个均匀分布变量 V_i 生成示性变量 δ_i:当$[0,1]$上随机数 $V_i \geqslant 0.1$ 时,定义 $\delta_i=1$,否则 $\delta_i=0$;当 $\delta_i=1$ 时,若 $X_i \leqslant T_0$,示性变量 $\beta_i=1$,否则 $\beta_i=-1$。定义 $z_i=\min\{T_0,x_i\}$。

第 3 步:计算参数 θ 的极大似然估计值:$\hat{\theta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i\delta_i+\beta_i^2\delta_i^2)}{2\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\delta_i^2\ln(1+z_i^{\alpha})}$。

第 4 步:重复执行第 2 步至第 3 步。$N=1\ 000$ 次,将所得到的 θ 的 N 个极大似然估计值的平均值作为 θ 最终的极大似然估计值 $\hat{\theta}_M$,并计算相对偏差 $\delta(\hat{\theta})=\left|\dfrac{\theta-\hat{\theta}_M}{\theta}\right|$ 和 MSE。同时计算 θ 的置信下限均值 $\hat{\theta}_M-Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{\theta}_M^{\ 2}}{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}}$ 和下限均值 $\hat{\theta}_M+Z_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{\theta}_M^{\ 2}}{np[1-(1+T_0^{\alpha})^{-\hat{\theta}_M}]}}$。

第 5 步:对第 4 步中产生的 N 个极大似然估计值,计算落在置信区间内的频率。模拟结果如表 1 所示。

表 1　定时截尾下 Burr Ⅻ分布参数 θ 的估计结果

n	α	T_0	θ	$\hat{\theta}$	$\delta(\hat{\theta})$	$MSE(\hat{\theta})$	$\hat{\theta}$ 的下限均值	$\hat{\theta}$ 的上限均值	覆盖率
50	0.2	2	1	1.017 3	0.017 3	0.221 6	0.613 1	1.421 5	0.930 0
	1.2	2	1	1.011 6	0.011 6	0.179 3	0.658 6	1.364 7	0.944 4
	8	2	1	1.021 4	0.021 4	0.147 5	0.722 4	1.320 3	0.966 0
	0.2	10	1	1.016 9	0.016 9	0.187 2	0.639 3	1.394 4	0.950 0
	1.2	10	1	1.030 1	0.030 1	0.161 0	0.720 5	1.339 6	0.950 0
	8	10	1	1.015 4	0.015 4	0.144 3	0.718 8	1.312 1	0.964 0
	0.2	10	3	3.053 4	0.017 8	0.459 2	2.135 7	3.971 2	0.952 0
	1.2	10	3	3.053 1	0.017 7	0.466 5	2.161 0	3.945 2	0.956 0
	8	10	3	3.057 6	0.019 2	0.448 1	2.171 3	3.963 9	0.968 0
	0.2	2	3	3.055 6	0.018 5	0.473 2	2.117 1	3.996 3	0.950 0
	1.2	2	3	3.058 6	0.019 5	0.475 5	2.153 1	3.964 2	0.946 0
	8	2	3	3.047 7	0.015 9	0.449 8	2.157 2	3.938 2	0.946 0
100	0.2	2	1	0.997 6	0.002 4	0.150 1	0.715 5	1.279 7	0.940 0
	1.2	2	1	1.009 8	0.009 8	0.128 3	0.760 5	1.259 1	0.952 0
	8	2	1	1.006 1	0.006 1	0.108 7	0.797 8	1.214 3	0.954 0
	0.2	10	1	1.011 3	0.011 3	0.135 0	0.747 3	1.277 2	0.958 0
	1.2	10	1	1.008 5	0.008 5	0.109 8	0.793 9	1.223 2	0.944 0
	8	10	1	1.011 6	0.011 6	0.098 4	0.802 6	1.220 6	0.964 0
	0.2	10	3	3.007 3	0.002 4	0.329 7	2.380 4	3.666 7	0.948 0
	1.2	10	3	3.029 9	0.009 9	0.314 0	2.403 9	3.656 0	0.960 0
	8	10	3	3.012 8	0.004 3	0.308 6	2.390 4	3.635 3	0.960 0
	0.2	2	3	3.033 1	0.011 0	0.336 1	2.373 2	3.693 0	0.958 0
	1.2	2	3	2.997 9	0.000 7	0.312 8	2.369 7	3.626 1	0.956 0
	8	2	3	3.014 0	0.004 7	0.314 6	2.391 3	3.636 7	0.954 0

结果表明 Burr Ⅻ分布形状参数的估计值不管参数 α 和定时截尾 T_0 如何取值都很接近参数真值,并且相对误差和均方误差较小,说明此估计方法是可取的。随着样本量的增加,在相同的条件下参数 θ 估计的相对误差和 MSE 都在减少,说明估计的精度在提高,也说明了极大似然估计的大样本性质,并且参数 θ 的真值介于下限均值与上限均值之间,覆盖率很接近置信水平 0.95。

参考文献:

[1]　李俊华,徐玉华.复合 Mlinex 损失下 Burr 分布参数的 Bayes 估计[J].统计与决策,2019,15:69-71.
[2]　郭红莹.双边定数截尾下 Burr 分布 Bayes 估计[J].黑龙江大学自然科学学报,2015,33(3):735-739.

(下转第 122 页)

$$\begin{vmatrix} \omega A_1-\mu A_3 & \omega B_1-\mu B_3 \\ \mu A_2-\omega A_4 & \mu B_2-\omega B_4 \end{vmatrix},$$

若以上比例与参数 ω,μ 无关,则式(13)的直线族为一族平行直线,即式(12)的曲面可看成由一族平行直线生成,根据柱面的定义可知式(12)的曲面为柱面,故命题Ⅱ成立。

例 3 证明方程

$$(x-z)^2+(y+z-1)^2=1 \tag{15}$$

表示的曲面为柱面。

证明:由方程(15)可知曲面为二次曲面,并且此方程可化为以下形式

$$(x-z)(x-z)-(y+z)(2-y-z)=0。$$

由定理 4 可知

$$A_1=A_2=1,B_1=B_2=0,C_1=C_2=-1,A_3=A_4=0,B_3=1,$$
$$B_4=-1,C_3=1,C_4=-1。$$

对任意不全为零的参数 ω,μ,

$$\begin{vmatrix} \omega A_1-\mu A_3 & \omega B_1-\mu B_3 \\ \mu A_2-\omega A_4 & \mu B_2-\omega B_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \omega B_1-\mu B_3 & \omega C_1-\mu C_3 \\ \mu B_2-\omega B_4 & \mu C_2-\omega C_4 \end{vmatrix} :$$

$$\begin{vmatrix} \omega C_1-\mu C_3 & \omega A_1-\mu A_3 \\ \mu C_2-\omega C_4 & \mu A_2-\omega A_4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \omega & -\mu \\ \mu & \omega \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -\mu & -\omega-\mu \\ \omega & -\mu+\omega \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -\omega-\mu & \omega \\ -\mu+\omega & \mu \end{vmatrix}$$

$$=1:1:(-1),$$

故由定理 4 可知原方程表示的曲面为二次曲面。

4 结语

柱面和锥面是解析几何中两类比较重要的曲面,它们都是直纹曲面。本文主要在直纹曲面的框架下讨论了柱面、锥面方程的求法以及柱面、锥面的判定,从而统一了柱面、锥面方程求法,统一了判别定理的证明方法,统一了二次柱面、锥面的判别形式。通过对这些内容的统一,一方面可以让学生从较高的角度去把握柱面和锥面的相关内容;另一方面也可以为教师节省不少教学时间。事实上,在具体的教学过程中,对教材做这样的统一处理,确实收到良好的教学效果。

参考文献:

[1] 熊宗洪,王燕红,王守财,等.二次直纹曲面的统一方程及柱面和锥面的判定[J].萍乡学院学报,2015,32(3):5-7.

[2] 潘朝毅.一种新的柱面判别方法[J].成都师范学院学报,2016,32(5):117-119.

[3] 何国庆.柱面方程的一点注记[J].高等数学研究,2012,15(2):12.

[4] 吕林根,许子道.解析几何[M].4 版.北京:高等教育出版社,2006.

[5] 吕杰,陈奇斌,李健全,等.解析几何[M].北京:科学出版社,2009.

[6] 李养成.空间解析几何[M].北京:科学出版社,2009.

[7] 石勇国,彭家寅.解析几何[M].北京:科学出版社,2014.

(上接第 102 页)

[3] 刘荣玄.对称熵损失下 Burr XⅡ分布族形状参数和失效率函数的 Bayes 估计[J].数理统计与管理,2014,32(6):434-440.

[4] 季海波.逐步首失效样本下 Burr Ⅻ分布参数的 Bayes 估计[J].青海师范大学学报,2019(4):55-58.

[5] 王晓红,宋立新.定时截尾数据 Pareto 分布参数的 Bayes 估计[J].辽宁工程技术大学学报,2013,32(2):245-248.

[6] 刘荣玄,邬四英,王新长. Pareto 分布在定时截尾样本下的估计问题[J].井冈山大学学报(自然科学版),2017,38(3):6-12.

[7] 刘银萍,张雨婷,秦青.定时截尾情形下指数分布参数的估计[J].吉林师范大学学报(自然科学版),2014,35(3):68-70.

[8] 龙兵,朱全新,刁长新.定时截尾缺失数据样本下 Lomax 分布总体形状参数估计与检验[J].郑州大学学报(理学版),2017,49(2):19-24.

[9] 薛娇,常胜,邓丽.定时截尾样本下两参数指数-威布尔分布的可靠性 Bayes 估计[J].重庆理工大学学报(自然科学版),2014,28(8):132-139.

[10] 谭玲.定时截尾情形下 Burr 分布参数的 Bayes 估计[J].苏州大学学报,2011,27(3):1-4.

[11] 龙兵.双边定时截尾下 Burr XⅡ分布的参数估计[J].兰州理工大学学报,2018,44(6):158-162.

[12] 茆诗松,王静龙,濮小龙.高等数理统计[M].北京:高等教育出版社,2000:116-118.