doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2021.01.012

爪形矩阵约束四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的求解

吴恒飞,张宗标

(亳州学院电子与信息工程系,安徽 亳州 236800)

摘 要:以四元数的实表示为基础,结合爪形矩阵的结构特点,利用矩阵的拉直与 Kronecker 积,将爪形矩阵约束四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 转换成无约束的实矩阵方程,得出其有自共轭解的充要条件及通解表达式。最后,在给定的解集中,求得已知四元数爪形矩阵有极小 Frobenius 范数的最佳逼近解。

关键词:四元数体;实表示;Kronecker 积;自共轭解;最佳逼近

中图分类号:O241.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-1891(2021)01-0058-04

Solution of Quaternion Matrix Equation $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ with Paw Form Matrix Constraints

WU Hengfei, ZHANG Zongbiao

(Department of Electronic and Information Engineering, Bozhou University, Bozhou, Anhui 236800, China)

Abstract: Based on the real representation of quaternion, combined with the structural characteristics of the claw matrix, and through the Kronecker product of matrices, the constrained quaternion matrix equation $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ of the claw matrix is transformed into the unconstrained real matrix equation.Then the necessary and sufficient conditions for the existence of a paw form matrix solution and a self-conjugate paw form matrix solution of the equation are obtained. Finally, the optimal approximation of the minimum Frobenius norm for the given quaternion claw matrix in the given solution set is obtained.

Keywords: quaternion field; real representation; Kronecker product; self-conjugate solution; optimal approximation

0 引言

爪形矩阵又称箭形矩阵,除第一行、第一列及主对角线之外,其余元素皆为零。爪形矩阵被应用于许多特殊领域,它的反特征值问题的研究成果较多[1-2]。

$$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C} \tag{1}$$

方程(1)是经典矩阵方程之一,Penrose 首次利用 Moore-Penrose 逆给出了有解的条件和通解表示[3]。此后许多学者根据矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的不同限制,虽然获得了不少的研究成果[4-6],但方程(1)在四元数体上讨论爪形矩阵约束解问题较少。

为叙述方便,引入一些符号:定义 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 表示全体 n 阶实矩阵的集合,$\mathbf{C}^{n\times n}$ 表示全体 n 阶复矩阵的集合,$\mathbf{Q}^{n\times n}$ 表示全体 n 阶四元数矩阵的集合,$\bar{\boldsymbol{A}}$、$\boldsymbol{A}^T$、$\boldsymbol{A}^*$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭、转置、共轭转置,$vec(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列拉直向量,$\boldsymbol{A}^+$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆,$\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数,$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 积。

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\mathbf{Q}^{n\times n}$ 是已知矩阵,$\boldsymbol{X}\in\mathbf{Q}^{n\times n}$ 是未知矩阵,本文旨在四元数体上讨论矩阵方程(1)的爪形矩阵解及最佳逼近问题。

定义 1:具有如式(2)形式的矩阵称为爪形矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1} & 0 \\ b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

若 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{Q}^{n\times n}$,称 $\boldsymbol{A}$ 为四元数爪形矩阵,用 $\boldsymbol{A}\mathbf{Q}^{n\times n}$

收稿日期:2020-05-22

基金项目:安徽省高校自然科学研究项目(KJ2017A704);亳州学院自然科学研究项目(BYZ2019B03);亳州学院精品课程《线性代数》(2017jpkc04);亳州学院教研项目(2017ybjy22);亳州学院科研项目(bsky201430)。

作者简介:吴恒飞(1984—),男,安徽亳州人,讲师,硕士,研究方向:矩阵的计算及应用。

表示 n 阶四元数爪形矩阵的全体，若 $a_i \in R, b_i$、$c_i \in Q$，且 $b^* = c$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为四元数自共轭爪形矩阵，全体四元数自共轭爪形矩阵用 $SAQ^{n\times n}$ 表示。

任意一个爪形矩阵都可由其第一行、第一列及主对角线的 $3n-2$ 个元素唯一确定，对式（2）中的矩阵 $\boldsymbol{A}$，令：

$$\alpha(\boldsymbol{A}) = (a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$H = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 & e_2 & \cdots & e_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{pmatrix} \in R^{n^2\times(3n-2)} \tag{4}$$

其中，e_i 为第 i 个分量为 1，其余分量都为零的 n 维单位向量，容易验证 $H^* H = I_{3n-2}$。

引理 1　四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是爪形矩阵的充要条件是 $vec(\boldsymbol{A}) = H \cdot \alpha(\boldsymbol{A})$，即：

$$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A}\mathbf{Q}^{n\times n} \Leftrightarrow vec(\boldsymbol{A}) = H \cdot \alpha(\boldsymbol{A}) \tag{5}$$

其中，$\alpha(\boldsymbol{A})$，H 如式（3）（4）所示。

引理 2[7-8]　已知 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathbf{Q}^{n\times n}$，则方程 $\boldsymbol{MX} = N$ 有解$\Leftrightarrow MM^+\boldsymbol{X} = N$，且有解时的通解及无解时的最小二乘解表达式皆可表示为 $\boldsymbol{X} = M^+N + (I - M^+\boldsymbol{A})Y$，其中 $\boldsymbol{Y} \in \mathbf{Q}^{n\times n}$ 是任意的矩阵。

问题Ⅰ　$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbf{Q}^{n\times n}$ 是已知矩阵，求爪形（自共轭爪形）矩阵 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{Q}^{n\times n}$，使 $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$。

问题Ⅱ　设 $S_E \neq \varnothing$ 是问题Ⅰ的解集，给定 $\overset{\frown}{X} \in \boldsymbol{A}\mathbf{Q}^{n\times n}$，求 $\hat{X} \in S_E$，使得 $\| \hat{X} - \overset{\frown}{X} \| = \min\limits_{x\in S_E} \| X - \overset{\frown}{X} \|$ 成立。

1 问题 I 的解

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbf{Q}^{n\times n}$，对 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 分别进行实分解：$\boldsymbol{A} = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$，$\boldsymbol{B} = B_0 + B_1 i + B_2 j + B_3 k$，$\boldsymbol{C} = C_0 + C_1 i + C_2 j + C_3 k$，其中 $A_i, B_i, C_i \in R^{n\times n}(i = 0,1,2,3)$，若 $\boldsymbol{X} = X_0 + X_1 i + X_2 j + X_3 k$，其中 $X_i \in R^{n\times n}(i = 0,1,2,3)$ 均为爪形实矩阵，代入式（1）可得：

$$(A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k)(X_0 + X_1 i + X_2 j + X_3 k)(B_0 + B_1 i + B_2 j + B_3 k) = (C_0 + C_1 i + C_2 j + C_3 k) \tag{6}$$

由式（6）可得式（1）的等价式：

$$\begin{cases} A_0X_0B_0 - A_1X_0B_1 - A_2X_0B_2 - A_3X_0B_3 - A_1X_1B_0 - A_0X_1B_1 + A_3X_1B_2 + A_2X_1B_3 - \\ A_2X_2B_0 + A_3X_2B_1 - A_0X_2B_2 - A_1X_2B_3 - A_3X_3B_0 - A_2X_3B_1 + A_1X_3B_2 - A_0X_3B_3 = C_0 \\ A_0X_0B_1 + A_1X_0B_0 + A_2X_0B_3 - A_3X_0B_2 - A_1X_1B_1 + A_0X_1B_0 + A_3X_1B_3 + A_2X_1B_2 - \\ A_2X_2B_1 - A_3X_2B_0 + A_0X_2B_3 - A_1X_2B_2 - A_3X_3B_1 + A_2X_3B_0 - A_1X_3B_3 - A_0X_3B_2 = C_1 \\ A_0X_0B_2 - A_1X_0B_3 + A_2X_0B_0 + A_3X_0B_1 - A_1X_1B_2 - A_0X_1B_3 + A_3X_1B_0 - A_2X_1B_1 - \\ A_2X_2B_2 + A_3X_2B_3 + A_0X_2B_0 + A_1X_2B_1 - A_3X_3B_2 - A_2X_3B_3 - A_1X_3B_0 + A_0X_3B_1 = C_2 \\ A_0X_0B_3 + A_1X_0B_2 - A_2X_0B_1 + A_3X_0B_0 - A_1X_1B_3 + A_0X_1B_2 - A_3X_1B_1 - A_2X_1B_0 - \\ A_2X_2B_3 - A_3X_2B_2 - A_0X_2B_1 + A_1X_2B_0 - A_3X_3B_3 + A_2X_3B_2 + A_1X_3B_1 + A_0X_3B_0 = C_3 \end{cases} \tag{7}$$

记：

$$T = \begin{pmatrix} B_0^T\otimes A_0 - B_1^T\otimes A_1 - B_2^T\otimes A_2 - B_3^T\otimes A_3 & -B_0^T\otimes A_1 - B_1^T\otimes A_0 + B_2^T\otimes A_3 + B_3^T\otimes A_2 & -B_0^T\otimes A_2 + B_1^T\otimes A_3 - B_2^T\otimes A_0 - B_3^T\otimes A_1 & -B_0^T\otimes A_3 - B_1^T\otimes A_2 + B_2^T\otimes A_1 - B_3^T\otimes A_0 \\ B_1^T\otimes A_0 + B_0^T\otimes A_1 + B_3^T\otimes A_2 - B_2^T\otimes A_3 & -B_1^T\otimes A_1 + B_0^T\otimes A_0 + B_3^T\otimes A_3 + B_2^T\otimes A_2 & -B_1^T\otimes A_2 - B_0^T\otimes A_3 + B_3^T\otimes A_0 - B_2^T\otimes A_1 & -B_1^T\otimes A_3 + B_0^T\otimes A_2 - B_3^T\otimes A_1 - B_2^T\otimes A_0 \\ B_2^T\otimes A_0 - B_3^T\otimes A_1 + B_0^T\otimes A_2 + B_1^T\otimes A_3 & -B_2^T\otimes A_1 - B_3^T\otimes A_0 + B_0^T\otimes A_3 - B_1^T\otimes A_2 & -B_2^T\otimes A_2 + B_3^T\otimes A_3 + B_0^T\otimes A_0 + B_1^T\otimes A_1 & -B_2^T\otimes A_3 - B_3^T\otimes A_2 - B_0^T\otimes A_1 + B_1^T\otimes A_0 \\ B_3^T\otimes A_0 + B_2^T\otimes A_1 - B_1^T\otimes A_2 + B_0^T\otimes A_3 & -B_3^T\otimes A_1 + B_2^T\otimes A_0 - B_1^T\otimes A_3 - B_0^T\otimes A_2 & -B_3^T\otimes A_2 - B_2^T\otimes A_3 - B_1^T\otimes A_0 + B_0^T\otimes A_1 & -B_3^T\otimes A_3 + B_2^T\otimes A_2 + B_1^T\otimes A_1 + B_0^T\otimes A_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\overset{\frown}{T} = T\begin{pmatrix} H & & & \\ & H & & \\ & & H & \\ & & & H \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \alpha(X_0) \\ \alpha(X_1) \\ \alpha(X_2) \\ \alpha(X_3) \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} vec(C_0) \\ vec(C_1) \\ vec(C_2) \\ vec(C_3) \end{pmatrix} \tag{9}$$

由于 $X_i\in R^{n\times n}(i=0,1,2,3)$ 是爪形矩阵，根据引理 1 得：

$$vec(X_i)=H\cdot\alpha(X_i)(i=0,1,2,3) \quad (10)$$

其中 $\alpha(A)$，H 如式(3)(4)所示。另(10)展开得：

$$\begin{pmatrix} vec(X_0)\\ vec(X_1)\\ vec(X_2)\\ vec(X_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H&&&\\ &H&&\\ &&H&\\ &&&H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(X_0)\\ \alpha(X_1)\\ \alpha(X_2)\\ \alpha(X_3)\end{pmatrix}$$

所以式(7)可以等价表示为：

$$\widehat{T}\,v=S \quad (11)$$

其中 $v\in R^{(12n-8)\times 1}$。

定理 1 给定矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\mathbf{Q}^{n\times n}$，式(1)有四元数爪形矩阵解的充要条件是 $\widehat{T}\ \widehat{T}^{+}S=S$，有解时，其通解表达式为：

$$\boldsymbol{X}=X_0+X_1i+X_2j+X_3k \quad (12)$$

其中，$v=\widehat{T}^{+}S+(I-\widehat{T}^{+}\widehat{T})\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Y}\in R^{(12n-8)\times 1}$，$\boldsymbol{Y}$ 为任意矩阵；$\alpha(X_i)\in R^{(3n-2)\times 1}$，$vec(X_i)=H\cdot\alpha(X_i)(i=0,1,2,3)$；$\widehat{T}\in R^{4n^2\times(12n-8)}$，$S\in R^{4n^2\times 1}$，而 $\alpha(X_i)$ 分别取自列向量 v 的 $1\sim(3n-2)$ 行，$(3n-1)\sim(6n-4)$ 行，$(6n-3)\sim(9n-6)$ 行及 $(9n-5)\sim(12n-8)$ 行。

证明 由引理 2 和方程(1)和(11)的等价性知，方程(1)有解的充要条件为方程(11)有解，即 $\widehat{T}\ \widehat{T}^{+}S=S$ 成立，方程(11)有解时的通解表达式为 $v=\widehat{T}^{+}S+(I-\widehat{T}^{+}\widehat{T})\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Y}\in R^{(12n-8)\times 1}$，且由式(9)可知 $\alpha(X_i)(i=0,1,2,3)$ 是分别取自 v 的 $1\sim(3n-2)$，$(3n-1)\sim(6n-4)$，$(6n-3)\sim(9n-6)$ 和 $(9n-5)\sim(12n-8)$ 行元素构成的 $3n-2$ 维列向量。又由于 $vec(X_i)=H\cdot\alpha(X_i)$，根据逆拉直运算，知 $\boldsymbol{X}=\sum_{i=0}^{3}vec^{-1}(H\cdot\alpha(X_i))=X_0+X_1i+X_2j+X_3k$，证毕。

对于问题 I 的爪形自共轭解，给出实对称爪形矩阵和实反对称爪形矩阵形式，记：

$$\alpha_1(\boldsymbol{A})=(a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})^T\in R^{2n-1},$$

$$\alpha_2(\boldsymbol{A})=(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})^T\in R^{n-1} \quad (13)$$

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix} e_1&0&\cdots&0&e_2&\cdots&e_n\\ 0&e_2&\cdots&0&e_1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&e_n&0&\cdots&e_1\end{pmatrix}\in R^{n^2\times(2n-1)},$$

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix} e_2&\cdots&e_n\\ -e_1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&-e_1\end{pmatrix}\in R^{n^2\times(n-1)} \quad (14)$$

其中 e_i 与式(4)同，计算得 $H_1{}^*H_1=diag(I_n,2I_{n-1})$，$H_2{}^*H_2=.2I_{n-1}$。

引理 3 设 $SAR^{n\times n}$、$AAR^{n\times n}$ 分别为全体爪形实对称矩阵和全体爪形实反对称矩阵的集合，则有 $A\in SAR^{n\times n}\Leftrightarrow vec(A)=H_1\cdot\alpha_1(A)$、$A\in AAR^{n\times n}\Leftrightarrow vec(A)=H_2\cdot\alpha_2(A)$，其中 $H_2,\alpha_1(A),H_2,\alpha_2(A)$ 如公式(13)(14)所示。

对四元数矩阵 $\boldsymbol{X}$ 进行实分解：$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1i+\boldsymbol{X}_2j+\boldsymbol{X}_3k$，若 $\boldsymbol{X}\in SAQ^{n\times n}$，则 $X^*=\boldsymbol{X}$，而 $(X_0+X_1i+X_2j+X_3k)^*=X_0^T-X_1^Ti-X_2^Tj-X_3^Tk$，因此 X_0 是 n 阶实对称爪形矩阵，$\boldsymbol{X}_i(i=1,2,3)$ 是 n 阶实反对称爪形矩阵，由引理 1 和引理 3 可得：

$$vec(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{H}_1\cdot\alpha_1(X_0),vec(X_i)=\boldsymbol{H}_2\cdot\alpha_2(X_i)(i=1,2,3) \quad (15)$$

即：

$$\begin{pmatrix} vec(X_0)\\ vec(X_1)\\ vec(X_2)\\ vec(X_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_1&&&\\ &H_2&&\\ &&H_2&\\ &&&H_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1(X_0)\\ \alpha_2(X_1)\\ \alpha_2(X_2)\\ \alpha_2(X_3)\end{pmatrix} \quad (16)$$

记：

$$\tilde{T}=T\begin{pmatrix} H_1&&&\\ &H_2&&\\ &&H_2&\\ &&&H_2\end{pmatrix},\tilde{v}=\begin{pmatrix}\alpha_1(X_0)\\ \alpha_2(X_1)\\ \alpha_2(X_2)\\ \alpha_2(X_3)\end{pmatrix},\tilde{S}=\begin{pmatrix} vec(C_0)\\ vec(C_1)\\ vec(C_2)\\ vec(C_3)\end{pmatrix} \quad (17)$$

于是，方程(1)的等价方程(7)可表示成

$$\tilde{T}\tilde{v}=\tilde{S} \quad (18)$$

其中，$\tilde{v}\in R^{(5n-4)\times 1}$，$\tilde{T}\in R^{4n^2\times(5n-4)}$，$\tilde{S}\in R^{4n^2\times 1}$，由式(15)~(18)有如下结论：

定理 2 给定矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\mathbf{Q}^{n\times n}$，方程(1)有四元数爪形自共轭矩阵解的充要条件是 $\tilde{T}\tilde{T}^{+}\tilde{S}=\tilde{S}$，有解时，其通解表达式为

$$\tilde{X}=X_0+X_1i+X_2j+X_3k \quad (19)$$

其中，$\tilde{v}=\tilde{T}^{+}\tilde{S}+(I-\tilde{T}^{+}\tilde{T})Z$，$Z\in R^{(5n-4)\times 1}$，$Z$ 为任意矩阵；$vec(X_0)=H_1\cdot\alpha_1(X_0)$，$vec(X_i)=H_2\cdot\alpha_2(X_i)(i=1,2,3)$，且 $\alpha_1(X_0)$ 是取自 v 的 $1\sim(2n-1)$ 行元素构成的 $2n-1$ 维列向量，而 $\alpha_2(X_i)(i=1,2,3)$ 是 $n-1$ 维列向量，元素分别对应于 v 的 $(2n)\sim(3n-2)$ 行，$(3n-1)\sim(4n-3)$ 行和 $(4n-2)\sim(5n-4)$ 行。

证明 由引理 2、3 和式(18)知，方程(1)存在四元数爪形自共轭矩阵解 $\Leftrightarrow\tilde{T}\tilde{T}^{+}\tilde{S}=\tilde{S}$，通解表达式为 $\tilde{v}=\tilde{T}^{+}\tilde{S}+(I-\tilde{T}^{+}\tilde{T})\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{Z}\in R^{(5n-4)\times 1}$ 为任意矩阵。由式(17)知 $\alpha_1(X_0)$ 是取自 $\tilde{v}$ 的 $1\sim(2n-1)$ 行，而 $\alpha_2(X_i)$

$(i=1,2,3)$ 元素是分别取自 $\tilde{v}$ 的 $(2n)\sim(3n-2)$ 行、$(3n-1)\sim(4n-3)$ 行及 $(4n-2)\sim(5n-4)$。再由矩阵拉直运算 $vec(X_i)$ 的逆运算,得方程(1)存在四元数爪形自共轭矩阵解式(19)成立,证毕。

2 问题 Ⅱ 的解

设问题 Ⅰ 的解集为 $S_E\neq\varnothing$,给定矩阵 $M\in \boldsymbol{AQ}^{n\times n}$,对四元数矩阵 M 进行实分解 $M=M_0+M_1i+M_2j+M_3k$,$M_i(i=0,1,2,3)$ 是爪形实矩阵,令

$$v_M=(\alpha(M_0),\alpha(M_1),\alpha(M_2),\alpha(M_3))^T\in R^{(12n-8)\times 1}\tag{20}$$

定理 3　给定 $M\in \boldsymbol{AQ}^{n\times n}$ 是已知四元数爪形矩阵,则存在 $\hat{X}^{n\times n}\in S_E$,使得对任意 $X\in S_E$,有 $\|\hat{X}-M\|=\min\limits_{X\in S_E}\|X-M\|$ 成立,且 $\hat{X}$ 的表达式为

$$\hat{X}=X_0+X_1i+X_2j+X_3k\tag{21}$$

其中,$\hat{v}=\overset{\frown}{T}{}^{+}S+(I-\overset{\frown}{T}{}^{+}\overset{\frown}{T})(I-\overset{\frown}{T}{}^{+}\overset{\frown}{T})^{+}(v_M-\overset{\frown}{T}{}^{+}S)$,$vec(X_i)=H\cdot\alpha(X_i)(i=0,1,2,3)$,$\alpha(X_i)\in R^{(3n-2)\times 1}$,$\alpha(X_i)$ 元素分别取自 $\hat{v}$ 的 $1\sim(3n-2)$ 行、$(3n-1)\sim(6n-4)$ 行、$(6n-3)\sim(9n-6)$ 行和 $(9n-5)\sim(12n-8)$。

证明　由式(4)易知 $\boldsymbol{H}$ 是列正交矩阵,且 $\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}=I_{3n-2}$,再根据定理 1,当 $\boldsymbol{X}\in S_E$ 时,有:

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{X}-M\|^2=\sum_{i=0}^{3}\|X_i-M_i\|^2=\\&\sum_{i=0}^{3}\|vec(X_i)-vec(M_i)\|^2=\\&\sum_{i=0}^{3}\|H\cdot\alpha(X_i)-H\cdot\alpha(M_i)\|^2=\\&\sum_{i=0}^{3}\|\alpha(X_i)-\alpha(M_i)\|^2=\|v-v_M\|^2=\\&\|\overset{\frown}{T}{}^{+}S+(I-\overset{\frown}{T}{}^{+}\overset{\frown}{T})Y-v_M\|^2,\end{aligned}$$

所以

$$\|\boldsymbol{X}-M\|=\min\Leftrightarrow\|(I-\overset{\frown}{T}{}^{+}\overset{\frown}{T})\boldsymbol{Y}-(v_M-\overset{\frown}{T}{}^{+}S)\|=\min\tag{22}$$

式(22)右端 $\|(I-\overset{\frown}{T}{}^{+}\overset{\frown}{T})\boldsymbol{Y}-(v_M-\overset{\frown}{T}{}^{+}S)\|=\min$,根据引理 2 知 $\boldsymbol{Y}$ 存在最小二乘解 $\overset{\frown}{Y}=(I-\overset{\frown}{T}{}^{+}\overset{\frown}{T}{}^{+})(v_M-\overset{\frown}{T}{}^{+}S)$,故

$$\begin{aligned}\hat{v}=&\overset{\frown}{T}{}^{+}S+(I-\overset{\frown}{T}{}^{+}\overset{\frown}{T})Y=\\&\overset{\frown}{T}{}^{+}S+(I-\overset{\frown}{T}{}^{+}\overset{\frown}{T})(I-\overset{\frown}{T}{}^{+}\overset{\frown}{T})^{+}(v_M-\overset{\frown}{T}{}^{+}S)\end{aligned}\tag{23}$$

$\alpha(X_i)(i=0,1,2,3)$ 分别取自 $\hat{v}$ 的 $1\sim(3n-2)$ 行,$(3n-1)\sim(6n-4)$ 行,$(6n-3)\sim(9n-6)$ 行和 $(9n-5)\sim(12n-8)$ 行元素构成 $3n-2$ 维列向量,记:

$$\hat{X}=X_0+X_1i+X_2j+X_3k$$

其中,$X_i=\mathrm{vec}^{-1}(H\cdot\alpha(X_i))(i=0,1,2,3)$,$\mathrm{vec}^{-1}$ 表式矩阵拉直运算的逆运算,即存在 $\hat{X}\in S_E$,使 $\|\hat{X}-M\|=\min$ 成立,且其解由式(21)表示,证毕。

3 数值例算

例 1　设给定四元数矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&i&0&0\\0&1&j&0\\0&0&1&k\\0&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\i&1&0&0\\0&j&1&0\\0&0&k&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2i-2j&i+j-k&1+2j-k&1-i\\2+i+j+k&-1&2j&0\\1+k&2j&-1&3k\\1+i&0&3k&1\end{pmatrix},$$

讨论方程(1)的自共轭爪形矩阵解。

解　对四元数矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别进行实分解:

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}_0=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\2&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}-2&1&2&0\\1&0&2&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_3=\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&3\\0&0&3&0\end{pmatrix}。$$

根据式(17)可计算出实矩阵 $\tilde{\boldsymbol{T}}$ 及实列向量 $\tilde{\mathbf{S}}$,进而计算 $\tilde{\boldsymbol{T}}\tilde{\boldsymbol{T}}^{+}\tilde{\mathbf{S}}=\tilde{\mathbf{S}}$,且 $\tilde{\boldsymbol{T}}\tilde{\boldsymbol{T}}^{+}=I$,再根据定理 2 可求得方程(1)存在唯一四元数爪形自共轭矩阵解 $\tilde{X}$,再由定理 2 的公式(19)可求得:

(下转第 99 页)

[2] 陈长洲,王红英,项贤林,等.改革开放 40 年我国青少年体质健康政策的回顾、反思与展望[J].体育科学,2019,39(3):38-47+97.
[3] 汪晓赞,杨燕国,孔琳,等.历史演进与政策嬗变:从“增强体质”到“体教融合”——中国儿童青少年体育健康促进政策演进的特征分析[J].中国体育科技,2020,56(10):3-10.
[4] 吴光芸,杨锦安.政策网络理论视角下我国青少年体质健康政策执行困境及其破解路径[J].体育学刊,2020,27(2):85-89.
[5] 武东海.青少年体质健康监测政策协同研究[J].北京体育大学学报,2019,42(8):37-45.
[6] 唐大鹏.我国学校体育政策执行过程审视——以史密斯模型为理论框架[J].广州体育学院学报,2019,39(1):113-116.
[7] 潘凌云,王健,樊莲香.我国学校体育政策落实的制约因素与路径选择——基于史密斯政策落实过程模型的分析[J].体育科学,2015,35(7):27-34+73.
[8] 郇昌店.1949—1966 年间我国青少年体质健康政策文本量化分析[J].山东体育学院学报,2017,33(3):37-42.
[9] THOMAS J S. Methods ofsocial research[M].Orlando:Harcourt College Publishers,2001:296297.
[10] LANDIS J R,KOCH G G. The measurement of observer agreement for categorical data.[J].Biometrics,1977,33(1):159-174.
[11] 陈振明.政策科学——公共政策分析导论[M].2 版.北京:中国人民大学出版社,2003:170-173.
[12] ROTHWELL R, ZEGVELD W.Industrial innovation and public policy:preparing for the 1980s and the 1990s[M].London:Frances Printer,1981:121-251.
[13] 贺新家,周贤江,王红梅.核心素养视角下我国学校体育政策及特征研究——基于 2014 年以来的 11 份政策文本量化分析[J].武汉体育学院学报,2019,53(10):28-35.
[14] 谭利,于文谦.改革开放以来我国学校体育政策工具的选择与优化[J].北京体育大学学报,2019,42(5):63-71.
[15] 国务院办公厅.国务院办公厅关于印发体育强国建设纲要的通知[EB/OL].(2019-09-02)[2020-06-02].http://www.gov.cn/zhengce/content/2019-09/02/content_5426485.htm.
[16] 国务院办公厅.国务院办公厅关于印发中国足球改革发展总体方案的通知[EB/OL].(2015-03-16)[2020-07-02].http://www.gov.cn/zhengce/content/2015-03/16/content_9537.htm.

(上接第 61 页)

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}1 & 1-k & 1+j & 1-i\\ 1+k & 1 & 0 & 0\\ 1-j & 0 & 2 & 0\\ 1+i & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

4 结语

本文提出了矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的四元数爪形自共轭解问题的解决方法,定义了爪形矩阵和自共轭爪形矩阵新的表达方式。由于四元数乘法具有不可交换性,本文引入矩阵的 Kronecker 积及四元数矩阵实分解,将四元数方程转化成无约束的矩阵方程,有效地解决了该问题。在此基础上,进一步求得方程具有四元数爪形自共轭解的充要条件和通解表达式,在方程有解的情况下,设解集为 $S_E\neq\varnothing$,利用 Frobenius 范数乘积的特点,得到在解集 S_E 内的最佳逼近解。

参考文献:

[1] 段复建,方甜,袁璠.一类特殊矩阵的逆特征值问题[J].数学杂志,2019,39(4):543-553.
[2] 陈永林.广义逆矩阵的理论与方法[M].江苏:南京师范大学出版社,2005:25.
[3] LIU X, WANG Q W. The least squares hermitian (anti)reflexive solution with the least norm to matrix equation $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2017, 2017(8):1-6.
[4] 邓勇.关于矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的广义 Hermitian 非负定解[J].东北师大学报(自然科学版), 2019,51(3):10-14.
[5] LI J F, HU X Y, PENG J J. Numerical solution of $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ for (R,S)-symmetric matrices[J]. Journal of Applied Mathematics & Computing, 2013, 43(1-2):523-546.
[6] TIAN Y G , WANG H X. Relations between least-squares and least-rank solutions of the matrix equation[M]. Amsterdam:Elsevier Science Inc.,2013.
[7] SUN J G . Backward perturbation analysis of certain characteristic subspaces[J]. Numerische Mathematik,1993, 65(1):357-382.
[8] 张宗标,李猛,唐树乔.子矩阵约束下的对称正交反对称矩阵反问题[J].数学的实践与认识,2013(15):265-272.