第 35 卷第 1 期 西昌学院学报(自然科学版) Vol.35,No.1
2021 年 3 月 Journal of Xichang University(Natural Science Edition) Mar.,2021

doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2021.01.011

微分求积法在常微分方程教学中的应用

葛仁余,马国强,刘小双,余本源

(安徽工程大学建筑工程学院,安徽 芜湖 241000)

摘　要:讨论了微分求积法在二阶常微分方程教学中的应用。基于微分求积法基本思想,将二阶常微分方程两点边值问题转化为高斯消元法求解线性代数方程组问题。通过 3 个教学实例,验证了微分求积法在教学过程中求解线性和非线性二阶常微分方程的精确性,让学生体会到求解方法的多样性。

关键词:微分方程;教学效果;数值方法;微分求积法微分方程;教学效果;数值方法;微分求积法

中图分类号:O241.81　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-1891(2021)01-0053-05

Application of Differential Quadrature Method in Ordinary Differential Equation Teaching

GE Renyu, MA Guoqiang, LIU Xiaoshuang, YU Benyuan

(School of Architecture and Civil Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu, Anhui 241000, China)

Abstract: In this paper we discuss the application of differential quadrature method in the teaching of second order ordinary differential equations. Based on the basic idea of differential quadrature method, the two-point boundary value problem of second-order ordinary differential equation is transformed into Gauss elimination method to solve linear algebraic equations. Through three teaching examples, we verifies the accuracy of differential quadrature method in solving linear and nonlinear second-order ordinary differential equations in the teaching process, so that students can realize that there exists a variety of methods in solving ordinary differential equations.

Keywords: differential equation; teaching effect; numerical method; differential quadrature method

0 引言

常微分方程是一门揭示客观事物之间量与量相互作用关系的一门课程,它在生物医学、经济学、结构动力学等领域都有着非常广泛的应用。现实世界中的很多实际问题都可以抽象为常微分方程问题,所以常微分方程具有很强的实践应用性[1-2]。然而,不是所有的微分方程都可以用解析方法来求解。根据一些复杂的工程实际问题建立起来的微分方程,在随后的人工解析方法求解过程中也会变得冗长繁琐。为了提高学生的学习兴趣和知识的混合应用能力,在很多问题中遇到的常微分方程的精确解是很难算出来的。这时,可以用数值方法求近似解,把 FORTRAN 语言编程计算技术运用到求解微分方程的教学中,让学生掌握编程计算的一技之长,对他们今后的学习与工作都很有帮助[3-5]。本文基于微分求积法基本理论[6],通过 FORTRAN 语言编程求解常微分方程,说明该数值方法在近似求解常微分方程教学中的巨大功效。

1 微分求积法基本理论

微分求积法是 Bellman 和 Casti 于 1971 年提出的基本理论,由于快速计算机及仿真技术的发展而引起了广大学者们的广泛关注。该方法求解常微分方程具有公式简单、编程方便、计算量少和精度高等优点。

假设一般二阶常微分方程为如下形式:

$$h_2(x)y''(x)+h_1(x)y'(x)+h_0(x)y(x)=f(x),\quad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{1}$$

边值条件为:

收稿日期:2020-07-29

基金项目:国家级大学生创新创业训练计划项目(202010363121);安徽工程大学本科教学质量提升计划重点项目(2019jyxm16)。

作者简介:葛仁余(1969—),男,安徽合肥人,副教授,博士,研究方向:计算固体力学教学。

$$y(a)=\beta_1,\ y(b)=\beta_2 \tag{2}$$

将区间 $[a,b]$ 均匀等分为 n 段, $a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b$, $h_i=x_i-x_{i-1}=(b-a)/n$ 。y'_i 表示 $y'(x)$ 在 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的近似值, y''_i 表示 $y''(x)$ 在 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的近似值;差分法把微分方程中各阶导数值用区间分划点上的函数值 $y_i(i=0,1,\cdots,n)$ 表示。微分求积法将最后的总体代数方程组的未知量选取为 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$,将 $y'(x_i)$ 和 $y''(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$ 用前述未知量表示,因此得到 $(n+1)$ 个线性代数方程组。微分求积法权系数的确定方法如下:将函数 $y(x)$ 用节点函数值进行拉格朗日(*Lagrange*)插值来描述,即

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)y(x_j) \tag{3}$$

式中, $l_j(x)$ 为拉格朗日多项式,其形式为

$$l_j(x)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k} \tag{4}$$

由式(2)和式(4)对函数 $y(x)$ 求一阶导数,得到

$$y'(x)=\sum_{j=0}^{n} l'_j(x)y_j \tag{5}$$

将式(5)在 n 段区间 $[a,b]$ 上离散,从而进一步得到

$$y'_i=y'(x_i)=\sum_{j=0}^{n} l'_j(x_i)y_j \quad (i,j=0,1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

将式(6)写成向量和矩阵形式,得

$$\boldsymbol{y}'_i=\boldsymbol{A}_{nn}^{(1)}\boldsymbol{y}_j \tag{7}$$

这里,

$\boldsymbol{y}'_i=(y'(x_0),y'(x_1),\cdots,y'(x_{n-1}),y'(x_n))^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{y}_i=(y(x_0),y(x_1),\cdots,y(x_{n-1}),y(x_n))^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{A}_{nn}^{(1)}=[A_{ij}^{(1)}]_{(n+1)\times(n+1)}$

其中, $A_{ij}^{(1)}$ 显示表达式为

$$A_{ij}^{(1)}=l'_j(x_i)=\begin{cases}\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}(x_i-x_k)\Big/\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x_j-x_k), & i\neq j,\\ \sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\dfrac{1}{(x_i-x_k)}, & i=j,\end{cases} \tag{8}$$

高阶导数顺次地采用低阶导替换,逐步递推可得

$$\boldsymbol{y}''_i=\boldsymbol{A}_{nn}^{(2)}\boldsymbol{y}_j \tag{9}$$

这里,

$\boldsymbol{y}''_i=(y''(x_0),y''(x_1),\cdots,y''(x_{n-1}),y''(x_n))^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{A}_{nn}^{(2)}=\boldsymbol{A}_{nn}^{(1)}\boldsymbol{A}_{nn}^{(1)}$。

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_j=\boldsymbol{f}_j \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{A}_{nn}^{(2)}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{A}_{nn}^{(1)}+\boldsymbol{G}_0$, $\boldsymbol{G}_0$、$\boldsymbol{G}_1$ 和 $\boldsymbol{G}_2$ 为系数对角阵, $\boldsymbol{I}$ 为 $(n+1)\times(n+1)$ 阶单位矩阵,

$\boldsymbol{G}_0=diag(h_0(x_0),h_0(x_1),\cdots,h_0(x_n))$,

$\boldsymbol{G}_1=diag(h_1(x_0),h_1(x_1),\cdots,h_1(x_n))$,

$\boldsymbol{G}_2=diag(h_2(x_0),h_2(x_1),\cdots,h_2(x_n))$,

$f_j=(f(x_0)f(x_1)\cdots f(x_{n-1})f(x_n))^{T}$

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{y}(a)=\beta_1,\boldsymbol{I}\boldsymbol{y}(b)=\beta_2 \tag{11}$$

将式(11)边界条件代入式(10)将 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{f}_j$ 的第0行、第 n 行置换,得新向量 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{f}}_j$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{y}_j=\tilde{\boldsymbol{f}}_j \tag{12}$$

因此,满足边值条件式(2)时,一般二阶常微分方程式(1)边值问题的计算,转化为高斯主元消去法求解式(12)线性代数方程组的未知量 $\boldsymbol{y}_j$ 问题,这里采用 FORTRAN 语言编制通用程序求解。源程序代码列举如下:

```
PARAMETER(N=12)
C-------设置自变量坐标-----------
PAI=3.14159265358979
DO 14 I=0,N
X(I)=1.0+(1.0/N)*I
14CONTINUE
C-----矩阵相乘形成系数矩阵----------
CALL JZFORM(N,D2,AP,AP,AI,AI,AI)
CALL JZFORM(N,D1,AJ,AP,AI,AI,AI)
CALL JZFORM(N,D0,AJJ,AI,AI,AI,AI)
DO 621 I=0,N
DO 621 J=0,N
D2(I,J)=D2(I,J)+D1(I,J)+D0(I,J)
621CONTINUE
C-----总体矩阵和列向量形成----------
DO 505 I=0,N
CL(I+1)=SIN(LOG(X(I)))/X(I)/X(I)
505CONTINUE
CL(1)=1.0
CL(N+1)=2.0
C-------高斯主元消去法------------
NN=N+1
CALL SLNPD(UL,CL,NN,EPS,NW)
C--------求解待求函数-------------
DO 88 I=1,N+1
WRITE(NW,803)   X(I-1),CL(I)
```

```
88   CONTINUE
802FORMAT(1X,1(1X,F17.5,",") ,1X,F17.5)
C-----求解待求函数一阶导函数---------
CALL MMTV(VL,CLL,N,NW)
DO 405 I=0,N
WRITE(NW,803)   X(I),CLL(I)
405 CONTINUE
DO 900 I1=0,N
900CLLL(I1)=CLL(I1)
C-----求解待求函数二阶导函数---------
     CALL MMTV(VL,CLLL,N,NW)
DO 407 I=0,N
WRITE(NW,803)   X(I),CLLL(I)
407 CONTINUE
STOP
END
```

2 教学实例分析

例 1　求解线性二阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} -y''(x)+y(x)=e^{x}(\sin x-2\cos x) \\ y(0)=0,y(\pi)=0 \\ 0\leqslant x\leqslant \pi \end{cases} \tag{13}$$

微分方程式(13)中,由于 $y''(x)$ 的系数为-1,$y(x)$ 的系数为 1,所以式(13)为常系数微分方程。其待求函数 $y(x)$ 、$y'(x)$ 和 $y''(x)$ 精确解为式(14),

$$\begin{cases} y(x)=e^{x}\sin x \\ y'(x)=e^{x}(\sin x+\cos x) \\ y''(x)=2e^{x}\cos x \end{cases} \tag{14}$$

如果按照常规的解析分析方法求其精确解,求解过程冗长繁琐。因此,在课堂教学中,我们可以使用 FORTRAN 语言编制程序,用数值方法近似计算代替复杂的解析方法来求解微分方程式(13)中的未知函数值 $y(x)$ 、$y'(x)$ 和 $y''(x)$ 。首先,将区间 $x\in[0,\pi]$ 分段数 $n=12$,区间按等步长方式布置离散节点,基于微分求积法基本原理,由 FORTRAN 语言编程计算式(13)微分方程的两点边值问题,获得的未知函数 $y(x)$ 及其一阶导函数 $y'(x)$ 和二阶导函数 $y''(x)$ 数值解如表 1 所列。由表 1 计算结果可知,微分求积法计算的函数值 $y(x)$ 、$y'(x)$ 和 $y''(x)$ 与精确解的相对误差为 0.00%,即数值解与精确解完全吻合,验证了该数值计算方法求解常系数微分方程两点边值问题的可行性和精确性。

例 2　求解线性二阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} y''(x)+\dfrac{2}{x}y'(x)-\dfrac{2}{x^2}y(x)=\dfrac{\sin(\ln x)}{x^2} \\ y(1)=1,y(2)=2 \\ 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases} \tag{15}$$

式(15)中,由于 $y'(x)$ 和 $y(x)$ 前的系数分别为 $\dfrac{2}{x}$ 和 $-\dfrac{2}{x^2}$,所以式(15)为变系数微分方程的两点边值问题。其待求函数 $y(x)$ 、$y'(x)$ 和 $y''(x)$ 精确解为式(16)。

表 1　求解微分方程边值问题的微分求积法计算值与精确解的误差分析

$x(i)$	$y(x)$			$y'(x)$			$y''(x)$		
	数值解	解析解	误差/%	数值解	解析解	误差/%	数值解	解析解	误差/%
0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.00	1.000 01	1.000 00	0.00	1.999 89	2.000 00	0.00
0.261 80	0.336 27	0.336 28	0.00	1.591 27	1.591 27	0.00	2.509 99	2.509 99	0.00
0.523 60	0.844 05	0.844 05	0.00	2.305 98	2.305 98	0.00	2.923 86	2.923 86	0.00
0.785 40	1.550 88	1.550 88	0.00	3.101 77	3.101 77	0.00	3.101 77	3.101 77	0.00
1.047 20	2.467 87	2.467 87	0.00	3.892 70	3.892 70	0.00	2.849 65	2.849 65	0.00
1.309 00	3.576 30	3.576 30	0.00	4.534 57	4.534 57	0.00	1.916 53	1.916 53	0.00
1.570 80	4.810 48	4.810 48	0.00	4.810 48	4.810 48	0.00	0.000 00	0.000 00	0.00
1.832 60	6.037 12	6.037 12	0.00	4.419 48	4.419 48	0.00	−3.235 28	−3.235 28	0.00
2.094 40	7.032 58	7.032 58	0.00	2.972 32	2.972 32	0.00	−8.120 53	−8.120 53	0.00
2.356 19	7.460 49	7.460 49	0.00	0.000 00	0.000 00	0.00	−14.920 98	−14.920 98	0.00
2.617 99	6.854 10	6.854 10	0.00	−5.017 55	−5.017 55	0.00	−23.743 29	−23.743 29	0.00
2.879 79	4.609 72	4.609 72	0.00	−12.593 99	−12.593 99	0.00	−34.407 42	−34.407 42	0.00
3.141 59	0.000 00	0.000 00	0.00	−23.140 69	−23.140 69	0.00	−46.281 27	−46.281 38	0.00

$$\begin{cases} y(x)=m_2x+\dfrac{m_1}{x^2}-\dfrac{3}{10}\sin(\ln x)-\dfrac{1}{10}\cos(\ln x) \\ y'(x)=m_2-\dfrac{2m_1}{x^3}-\dfrac{3}{10x}\cos(\ln x)+\dfrac{1}{10x}\sin(\ln x) \\ y''(x)=\dfrac{6m_1}{x^4}+\left[\dfrac{1}{5}\sin(\ln x)+\dfrac{2}{5}\cos(\ln x)\right] \end{cases} \quad (16)$$

其中，

$$m_1=\frac{1}{70}[8-12\sin(\ln 2)-4\cos(\ln 2)],$$

$$m_2=\frac{11}{10}-m_1。$$

教学中采用数值方法近似计算时，将区间 $x\in[1,2]$ 分段数 $n=12$，区间按等步长方式布置离散节点，基于微分求积法基本原理，由 FORTRAN 语言编程计算式(15)可得两点边值问题的待求函数 $y(x)$、一阶导函数 $y'(x)$ 和二阶导函数 $y''(x)$ 计算值如图 1~3 所示。由图 1~3 计算结果表明，微分求积法获得的待求函数值 $y(x)$、$y'(x)$ 和 $y''(x)$ 的数值方法计算结果与精确解曲线完全重合。综合教学实例 2.1 和 2.2 可知，在课堂教学中，数值方法近似求解这一过程让学生体会到微分方程求解方法的多样性和精确性，激发了学生学习微分方程的兴趣和积极性。

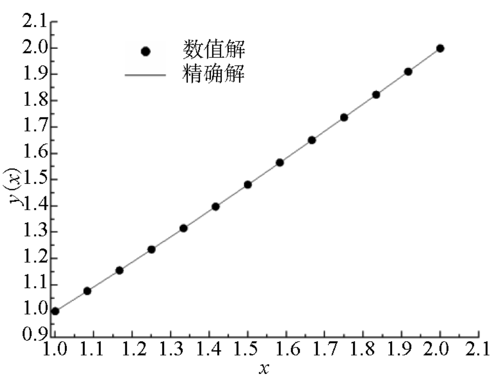

图 1　微分方程待求函数 $y(x)$ 的数值解与精确解对比

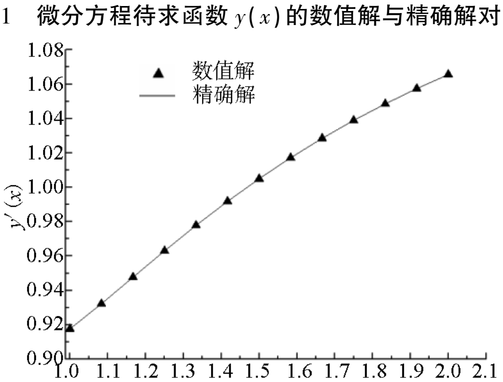

图 2　微分方程待求函数 $y'(x)$ 的数值解与精确解对比

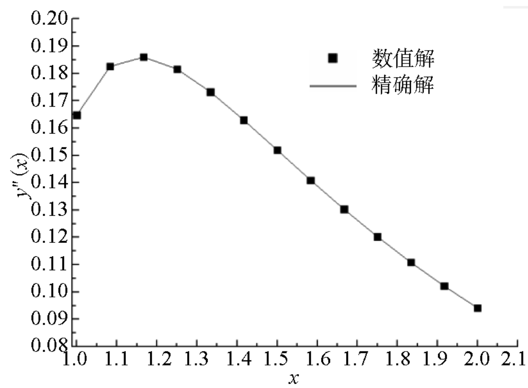

图 3　微分方程待求函数 $y''(x)$ 的数值解与精确解对比

例 3　求解非线性二阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} y''(x)+y^2(x)=x^2\sin^2x+2\cos x-x\sin x \\ y(0)=0,y(\pi)=0 \\ 0\leqslant x\leqslant\pi \end{cases} \quad (17)$$

由于微分方程中含有 $y^2(x)$ 项，导致式(17)为非线性二阶常微分方程两点边值问题。其待求函数 $y(x)$、$y'(x)$ 和 $y''(x)$ 精确解为：

$$\begin{aligned} &y(x)=x\sin x \\ &y'(x)=\sin x+x\cos x \\ &y''(x)=2\cos x-x\sin x \end{aligned} \quad (18)$$

按等步长方式布置离散节点，将区间 $x\in[0,\pi]$ 分段数 $n=12$，基于微分求积法基本原理，由 FORTRAN 语言编程计算式(17)可得非线性二阶常微分方程的待求函数 $y(x)$、一阶导函数 $y'(x)$ 和二阶导函数 $y''(x)$ 计算值如图 4~6 所示，数值解曲线与精确解曲线完全重合，再次证明了微分求积法在实际教学过程中求解非线性二阶常微分方程的可行性和精确性。

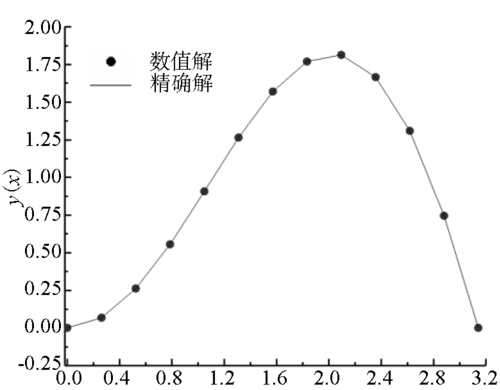

图 4　微分方程待求函数 $y(x)$ 的数值解与精确解对比

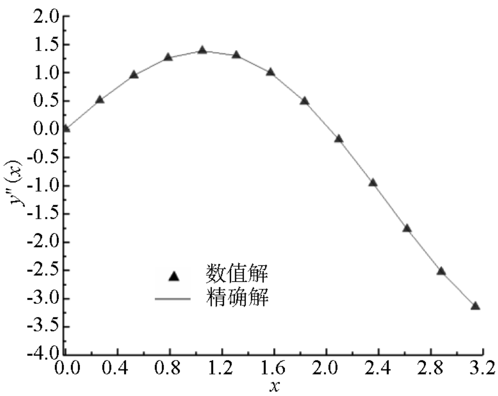

图5　微分方程待求函数 $y'(x)$ 的数值解与精确解对比

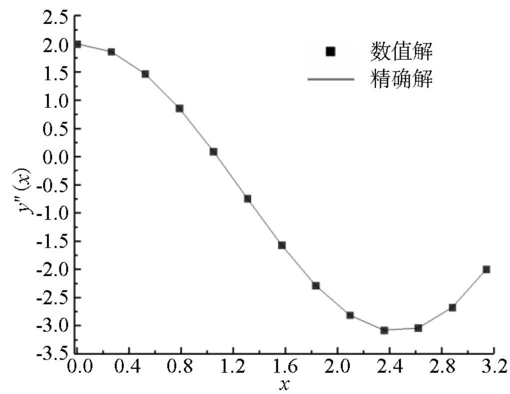

图6　微分方程待求函数 $y''(x)$ 的数值解与精确解对比

3 结语

1)在用人工的解析方法求解常微分方程问题的精确解教学中,我们可以适当地借助数学软件、C语言或者FORTRAN语言编程计算获得近似解。这一教学过程既让学生体会到微分方程求解方法的多样性,也让学生们掌握编制程序解决问题的一技之长,对他们今后的学习与工作都有较大帮助。同时,也让学生明白:不能用人工的解析方法获得精确解的微分方程,可以借助数值方法近似获得计算结果。

2)在课堂教学中,定时安排学生们上机实验,加强C语言或FORTRAN语言的实际操作训练,可以提高学生熟练运用计算机的能力,用编制通用程序替代复杂的人工方法计算,既可以节省时间,增加课堂的授课内容,也可以提高学生的学习积极性和兴趣。

参考文献:

[1]　袁宏俊,张圣梅.数学文化驱动的《常微分方程》课程的教学研究[J].宁夏师范学院学报,2019,40(7):107-112.

[2]　李宝萍.案例分析在常微分方程教学中的应用[J].山东农业工程学院学报,2018,35(4):150-152.

[3]　刘相国,杨晓伟,王冬银.基于MATLAB的《常微分方程》教学研究[J].西安文理学院学报(自然科学版),2020,23(2):124-128.

[4]　贾对红.建模思想在"常微分方程"教学中的应用[J].长治学院学报,2018,35(5):24-26

[5]　毛辉.浅谈Maple在常微分方程教学中的应用[J].教育教学论坛,2019(51):198-199.

[6]　BERT C W, WANG X, STRIZ A G. Differentional quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plate[J]. International Journal of Solids and Structures, 1993,30(13):1737-1744.

(上接第52页)

参考文献:

[1]　戴丹.从功利主义到现代社会交换理论[J].兰州学刊,2005(2):197-199+114.

[2]　张安民,赵磊.感知价值对居民参与旅游风情小镇建设意愿的影响——以浙江莫干山旅游风情小镇为例[J].旅游学刊,2019,34(4):119-131.

[3]　周学军,李勇汉.社区居民的扶贫旅游参与意愿研究——基于旅游影响感知、态度的视角[J].技术经济与管理研究,2017(7):26-30.

[4]　汲忠娟,蒋依依,谢婷.旅游地居民感知和态度研究综述[J].资源科学,2017,39(3):396-407.

[5]　黄燕玲.基于旅游感知的西南少数民族地区农业旅游发展模式研究[D].南京:南京师范大学,2008.

[6]　王莉,陆林,王咏,等.古村落旅游地利益主体关系及影响研究——世界文化遗产地西递、宏村实证分析[J].资源开发与市场,2006(3):276-279.

[7]　文彤,雍玉凤,张庆芳.态度、行为、责任:乡村旅游从业者影响感知研究[J].资源开发与市场,2018,34(3):418-421+444.