第34卷第4期　　西昌学院学报(自然科学版)　　Vol.34,No.4
2020年12月　　Journal of Xichang University(Natural Science Edition)　　Dec.,2020

doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2020.04.006

一类完全阶边值问题解的唯一性

邓瑞娟
(芜湖职业技术学院基础部,安徽 芜湖 241003)

摘要: 讨论了形如 $\begin{cases}-u^{(n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),...,u^{(n-1)}(t)),\ t\in[0,1],\\ u^{(i)}(0)=0,\ i=0,1,2,...,n-2,\\ u^{(n-1)}(1)=0,\end{cases}$ 的完全n阶边值问题解的唯一性。先运用经典的泛函分析方法得到了n阶情形时,在$f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$对于$x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$满足lipschitz条件下方程有唯一解这一结论;再将结果应用在三阶情形,得到相关推论。

关键词: 完全n阶边值;lipschitz条件;唯一性
中图分类号: O175.8　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673-1891(2020)04-0025-03

Uniqueness of the Solution for a Class of Complete *N*-order Boundary Value Problems

DENG Ruijuan
(Department of Basic Education, Wuhu Institute of Technology, Wuhu,Anhui 241003, China)

Abstract: In this paper, the uniqueness of thesolution of the complete –order boundary value problem as below:

$$\begin{cases}-u^{(n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),...,u^{(n-1)}(t)),\ t\in[0,1],\\ u^{(i)}(0)=0,\ i=0,1,2,...,n-2,\\ u^{(n-1)}(1)=0,\end{cases}$$

is discussed.We first discuss the –order BVP withfunctional analysis method and findthat if $f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ satisfies the Lipschitz condition for ,the solution of the BVP is unique. Then, we usethe result in the third order case and reach corresponding conclusion.

Keywords: complete n–order boundary value problem; Lipschitz condition; uniqueness

0 引言

关于微分方程的边值问题的研究,最早可以追溯到微积分创立的初期,悬链线问题和最速降线问题就是典型的例子。伴随着泛函理论的兴起,泛函分析方法逐渐成为了研究边值问题的重要手段和工具。近半个世纪来,微分方程的边值问题引起了很多人的关注,也得到了很多结论[1-8],有了非常快速的发展。其研究领域也从二阶逐步扩展到了三阶,甚至n阶。相关理论更是广泛的应用于电学、非牛顿流体理论、材料学、生态学等各个领域,对很多领域的发展提供了理论支持。

例如,文献[2]通过构建一个极大值原理,并结合上下解理论,得出了式(1)。

$$\begin{cases}-u'''(t)=f(t,u(t),u'(t)),\ t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0,\end{cases}\tag{1}$$

解的存在性,对三阶边值问题(BVP)的研究有重要的推动意义。

文献[6]是在$f(t,x,y,z)$对x,y,z满足超线性增长条件下,结合不动点理论,给出了方程式(2)。

$$\begin{cases}-u'''(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\ t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=0,\end{cases}\tag{2}$$

解的存在性,文献[7]则是用类似的证明方法,将文献[6]的结果推广至n阶情形,但二者均未给出在这些条件下解的唯一性结果。

本文在文献[7]的基础上,增加了$f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$关于$x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$的lipschitz条件,讨论了如式(3)方程解的唯一性。

收稿日期: 2020-03-25
基金项目: 安徽高校自然科学研究重点项目(KJ2019A0976);安徽省高等学校质量工程项目(2017ghjc270)。
作者简介: 邓瑞娟(1984—),女,安徽芜湖人,副教授,硕士,研究方向:常微分方程。

$$\begin{cases}-u^{(n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),\dots,u^{(n-1)}(t)),\ t\in[0,1],\\ u^{(i)}(0)=0,\ i=0,1,2,\dots,n-2,\\ u^{(n-1)}(1)=0,\end{cases}\qquad(3)$$

其中$f:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为连续函数,并将这一结果应用在三阶情形,完善了文献[6-7]的研究工作。

1 准备工作

为方便表述,作如下符号说明:令$I=[0,1]$,记$C(I)$为定义在I上的Banach空间,其上的范数为$\|u\|_c=\max\limits_{t\in I}|u(t)|$。$C^n(I)$(n=0,1,2,...)为定义在$I$上的全体$n$阶连续可微函数构成的Banach空间,其上的范数为$\|u\|_{C^n}=\max\limits_{t\in I}\left\{\|u\|_C,\|u'\|_C,\dots,\|u^{(n)}\|_C\right\}$。$L^2(I)$为定义在$I$上的全体Lebesgue平方可积函数构成的Hilbert空间,其上内积为

$(u,v)=\int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t$,内积范数为$\|u\|_2=\left(\int_0^1|u(t)|^2dt\right)^{1/2}$。

引理1[7] 对$\forall h\in L^2(I)$,线性边值问题LBVP

$$\begin{cases}-u^{(n)}(t)=h(t),\ t\in[0,1],\\ u^{(i)}(0)=0,\ i=0,1,2,\dots,n-2,\\ u^{(n-1)}(1)=0,\end{cases}\qquad(4)$$

有唯一解$u:=Sh\in H^n(I)$,且解算子$S:L^2(I)\to H^n(I)$为有界线性算子。当$h\in C(I)$时,解$u:=Sh\in C^n(I)$,且解算子$S:C(I)\to C^{n-1}(I)$为线性全连续算子。

在上述引理中,

$H^n(I)=\{u|u\in C^{(n-1)}(I),u^{(n-1)}$在$I$上绝对连续,且$u^n\in L^2(I)\}$构成Hilbert空间,其上定义内积$(u,v)_n=\sum\limits_{k=0}^n(u^{(k)},v^{(k)})$,内积范数为$\|u\|_{n,2}=\left(\sum\limits_{k=0}^n\|u^{(k)}\|_2^2\right)^{1/2}$。

引理2[7] 对$\forall h\in L^2(I)$,线性边值问题(2)的解u满足

$\|u^{(i)}\|_2^2\le\frac{1}{2}\|u^{(i+1)}\|_2^2$ 其中i=0,1,2,...,n-2。

2 主要结果

定理1 若BVP(3)中f满足:

(H1)存在常数$a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\geqslant0$,$C_0>0$,使得

$\frac{1}{2^{n-1}}a_0+\frac{1}{2^{n-2}}a_1+\cdots+\frac{1}{2}a_{n-2}+a_{n-1}<1$,且

$f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})x_{n-2}\leqslant a_0x_0^2+a_1x_1^2+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}^2+C_0$,

(H2)对$\forall M>0$,$\exists g_M\in C^+(\mathbb{R})$,有

$\int_0^{+\infty}\frac{rdr}{g_M(r)}=+\infty$,

使得$|f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})|\leqslant g_M(|x_{n-1}|)$,$(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})\in[0,1]\times[-M,M]^{n-1}\times\mathbb{R}$,

(H3)存在常数$\bar a_0,\bar a_1,\dots\bar a_{n-1}$,使得$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n\bar a_{n-1-k}^2}{2^{k-1}}<1$,且

$$|f(t,x_0,x_1,\dots,x_{n-1})-f(t,\tilde x_0,\tilde x_1,\dots,\tilde x_{n-1})|\le\bar a_0|x_0-\tilde x_0|+\bar a_1|x_1-\tilde x_1|+\cdots+\bar a_{n-1}|x_{n-1}-\tilde x_{n-1}|$$

则BVP(3)有唯一解。

证明:BVP(3)解的存在性证明见文献[7]中定理1,本文仅证明解的唯一性。

令$u=u_2-u_1$,其中$u_1,u_2\in C^n(I)$为BVP(2)的两个解,根据方程(3)有

$$-u^{(n)}(t)=-u_2^{(n)}(t)+u_1^{(n)}(t)=f(t,u_2,u_2',\dots,u_2^{(n-1)})-f(t,u_1,u_1',\dots,u_1^{(n-1)})\qquad(5)$$

将上式定义为$h(t)$。由引理1知,$u\in H^n(I)$为$h(t)$相应的LBVP(4)的解。

根据范数$\|u\|_2$的定义,再运用柯西不等式,可得不等式(6)。

$$\|u^{(n-1)}\|_2^2=\int_0^1|u^{(n-1)}(t)|^2dt=\int_0^1\left|\int_t^1u^{(n)}(s)ds\right|^2dt\le\int_0^1\int_t^1|u^{(n)}(s)|^2dsdt\qquad(6)$$

对不等式右侧式子运用分部积分公式,有

$$\|u^{(n-1)}\|_2^2\le t\int_t^1|u^{(n)}(s)|^2ds+\int_0^1t|u^{(n)}(t)|^2dt\le2\int_0^1|u^{(n)}(t)|^2dt=2\|u^{(n)}\|_2^2。$$

接下来,对(5)式先平方后积分,再运用(H3)和引理2,有

$$\|u^{(n-1)}\|_2^2\le2\|u^{(n)}\|_2^2=2\|h(t)\|_2^2=2\int_0^1\left|f(t,u_2,u_2',\dots,u_2^{(n-1)})-f(t,u_1,u_1',\dots,u_1^{(n-1)})\right|^2dt$$

$$\le2n\int_0^1\left[\bar a_0^2|u_2-u_1|^2+\bar a_1^2|u_2'-u_1'|^2+\cdots+\bar a_{n-1}^2|u_2^{(n-1)}-u_1^{(n-1)}|^2\right]dt$$

$$=2n\left(\bar a_0^2\|u\|_2^2+\bar a_1^2\|u'\|_2^2+\cdots+\bar a_{n-1}^2\|u^{(n-1)}\|_2^2\right)$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n\bar a_{n-1-k}^2}{2^{k-1}}\|u^{(n-1)}\|_2^2。$$

因此,必有$\left[1-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n\bar a_{n-1-k}^2}{2^{k-1}}\right]\|u^{(n-1)}\|_2^2\le0$。根据(H3)可知$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n\bar a_{n-1-k}^2}{2^{k-1}}<1$,有$\|u^{(n-1)}\|_2^2=0$于是可得$u^{(n-1)}\equiv0$。由$u=\int_0^tu'(s_1)ds_1=\int_0^t\int_0^{s_1}u''(s_2)ds_2ds_1=\cdots=\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-2}}u^{(n-1)}(s_{n-1})ds_{n-1}\cdots ds_2ds_1$知$u\equiv0$,即$u_1=u_2$。因此BVP(3)有唯一解。

证毕。

三阶常微分方程的边值问题在三层梁、核物理学、弹性梁的扰动等领域都有着重要的应用。在定理1中,取n=3,则得到关于完全三阶边值问题解的唯一性推论。

推论1 若BVP(2)中f满足如下三个条件:

(H4)存在常数$a,b,c\geqslant0$,$C_0>0$

使得$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c<1$,且

$f(t,x,y,z)y\leqslant ax^2+by^2+cz^2+C_0$,

(H5)对$\forall M>0$,$\exists g_M\in C^+(\mathbb{R})$,有

$$\int_0^{+\infty} \frac{rdr}{g_M(\mathrm{r})} = +\infty$$

使得 $|f(t,x,y,z)| \leqslant g_M(|z|)$，$(t,x,y,z) \in [0,1] \times [-M, M]^2 \times \mathbb{R}$，

（H6）存在常数 $\bar{a},\bar{b},\bar{c} \geqslant 0$，使得 $\frac{3}{2}\bar{a}^2 + 3\bar{b}^2 + 6\bar{c}^2 < 1$，且 $|f(t,x_2,y_2,z_2) - f(t,x_1,y_1,z_1)| \le \bar{a}|x_2 - x_1| + \bar{b}|y_2 - y_1| + \bar{c}|z_2 - z_1|$，

则BVP（1）有唯一解。

3 结语

本文在文献[6-7]所做工作的基础之上，在lipschitz条件成立的前提下，得到了 n 阶BVP解的唯一性结论，并给出了 n=3时解的唯一性推论，完善了文献[6-7]的研究结果。

参考文献：

[1] CHU J F, ZHOU Z C. Positive solutions for singular non-linear third-order periodic boundary value problem[J]. Nonlinear Anal: Theory, Meth Appl, 2006,64(7):1528-1542.

[2] FENG Y, LIU S. Solvability of a third-order two-point boundary value problem[J]. Appl Math Lett, 2005,18(9):1034-1040.

[3] 刘爱兰.一类完全三阶两点边值问题解的存在性与唯一性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(6):24-28.

[4] 潘凤,武晨.带有积分型边值条件的三阶边值问题两个正解的存在性[J].长春师范大学学报,2020,39(2):1-4+9.

[5] 李嫣红,李永祥.一类完全三阶常微分方程边值问题的正解[J].吉林大学学报(理学版),2018,56(2):208-214.

[6] 李菊鹏,李永祥.完全三阶边值问题解的存在性[J].四川大学学报(自然科学版),2018,55(4):688-692.

[7] 李菊鹏,李永祥.一类n阶完全常微分方程边值问题解的存在性[J].吉林大学学报(理学版),2019,57(1):9-14.

[8] 李朝倩.一类非线性四阶边值问题解的存在唯一性[J/OL].山东大学学报(理学版):1-8[2020-03-26].http://kns.cnki.net/kcms/detail/37.1389.N.20200311.1645.004.html.

（上接第 7 页）

参考文献：

[1] 颜淑芳.纤维素酶产生菌的选育鉴定及产酶性能研究[D].南昌:南昌大学,2010.

[2] 陈丽燕,张光祥,黄春萍,等.两株高产纤维素酶细菌的筛选、鉴定及酶学特性[J].微生物学通报,2011,38(4):531-538.

[3] 顿宝庆,吴薇,王旭静,等.一株高纤维素酶活力纤维素分解菌的分离与鉴定[J].中国农业科技导报,2008,10(1):113-117.

[4] 陈敏.一种改进的纤维素分解菌鉴别培养基[J].杭州师范学院学报(自然科学版),2001(6):11-12.

[5] 东秀珠,蔡妙英.常见细菌系统鉴定手册[M].北京:科学出版社,2001:349-388.

[6] 何楠,令利军,冯蕾,等.1株产纤维素酶细菌的筛选、鉴定及生长特性[J].微生物学杂志,2017,37(1):43-49.

[7] 王晓明,孙玉辉,张欢,等.绿色木霉固态发酵生产纤维素酶条件优化与酶的固定化[J].浙江农业学报,2014,26(1):186-193.

[8] 汤新,刘刚,田生礼,等.里氏木霉内切葡萄糖苷酶Ⅳ在毕赤酵母中的表达[J].微生物学通报,2005(6):47-51.

[9] 范晓静,杨瑞先,邱思鑫,等.内生芽孢杆菌BS2的β-1,4-内切葡聚糖酶基因与定殖相关性[J].中国农业科学,2014,47(2):262-272.

[10] 刘东国,吴云青,段学辉.联合生物加工产纤维素乙醇中真菌的开发与应用[J].化工进展,2018,37(9):3568-3576.

[11] 蒋明星,丁晓帆.纤维素降解细菌的筛选及其酶活测定[J].中国农学通报,2015,31(36):161-164.

[12] 乐文民,李江华,刘龙,等.产中性纤维素酶细菌的筛选及培养基优化[J].食品与生物技术学报,2015,34(2):183-188.

[13] 黄河,林元山,周熠,等.一株耐酒精纤维素酶产生菌的筛选、鉴定及其特性研究[J].中国酿造,2015,34(3):62-65.

[14] 陈丽燕,张光祥,黄春萍,等.两株高产纤维素酶细菌的筛选、鉴定及酶学特性[J].微生物学通报,2011,38(4):531-538.

[15] 北京国家粮食交易中心.我国每年秸秆产量有9亿吨 利用不到四成[EB/OL].(2017-06-02)[2020-03-20]. https://www.sohu.com/a/145506749_488938.

[16] 尚燕,颜廷武,张童朝,等.政府行为对农民秸秆资源化利用意愿的影响——基于"激励"与"约束"双重视角[J].农业现代化研究,2018,39(1):130-138.