doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2020.04.005

一元函数一致连续性的几类判别法及其应用

张 艳,阿力非日
(西昌学院彝语言文化学院,四川 西昌 615000)

摘要:一元函数的一致连续性是一元函数连续性的延伸,是数学分析专业的重点和难点,是后续二元函数的一致连续性和级数一致收敛的基础。通过对一致连续性的几类判别法和相关的应用进行集中研究,希望对数学专业考研的读者有一定的帮助。

关键词:一元函数;一致连续性;收敛;Lipschitz 条件
中图分类号:O174.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-1891(2020)04-0022-03

Several Discriminant Methods for Uniform Continuity of Unary Functions and Their Applications

ZHANG Yan, ALI Feiri
(School of Yi Language and Culture, Xichang University, Xichang, Sichuan 615000, China)

Abstract: The uniform continuity of unary function is the extension of the continuity of unary function, which is the key and difficult point of mathematical analysis majors, and also the foundation of the uniform continuity and uniform convergence of series of the subsequent binary functions. Through a targeted research on several discriminant methods for uniform continuity and their corresponding application, this paper expects to give useful advise to students preparing for post-graduate entrance examination for math majors.

Keywords: unary functions; uniform continuity; convergence; Lipschitz condition

0 引言及预备知识

定义1 设函数f在$U(x_0)$上有定义。若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称$f$在点$x_0$连续。

定义2 若函数f在I上的每一点都连续,则称f为I上的连续函数。

定义3 函数f在点x_0连续等价于$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta(\varepsilon,x_0)>0$,当$|x-x_0|<\delta$时:

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

定义4 设f是定义在区间I上的函数,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta(\varepsilon,x_0)>0$,$\forall x',x''\in I$,只要$|x'-x''|<\delta$则有

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

则称函数f在区间I上一致收敛.

定义5 函数f在区间I上不一致收敛等价于:

$\exists\varepsilon_0>0$,$\forall\delta>0$,$\exists x',x''\in I$虽然$|x'-x''|<\delta$,但是$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$

注:由上面的定义可知,函数在区间上的连续与一致连续这两个概念有着重要的区别.

f在I上连续是指:$\forall\varepsilon>0$,$\forall x\in I$,$\exists\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$,只要$x'\in I$且$|x'-x''|<\delta$就有

$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$。

上面的δ同时依赖于ε和x。

而f在I上一致连续是指:$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$只要$x',x''\in I$且$|x'-x''|<\delta$,就有

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

上面的δ只依赖于ε,与x无关,即存在适用于I上所有的点x的公共δ。

为了证明我们的结论.我们还需要下面的定理。

定理1.1(Cantor定理) [1] 若函数f在闭区间$[a,b]$上连续,则一致连续。

1 证明一元函数一致连续性的几类常用判定命题

命题1 若f在区间$[a,b]$和$[b,c]$上一致连续,则f在$[a,c]$上也一致连续。(北京大学)

证明:有函数f在区间$[a,b]$和$[b,c]$上一致连续,则对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_1>0$,$\forall x',x''\in[a,b]$,

且$|x'-x''|<\delta_1$时,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。 (1)

收稿日期:2019-07-30
作者简介:张艳(1988—),女,四川广安人,讲师,硕士,研究方向:非线性分析研究。

$\exists\delta_2>0,\forall x',x''\in[b,c]$且$|x'-x''|<\delta_2$时,有
$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。　　（2）

由f在b处即既右连续,又左连续,所有f在b处连续。故对上述的$\varepsilon>0,\exists\delta_3>0$,当$|x-b|<\delta_3$时,
有$\left|f(x)-f(b)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。　　（3）

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$,对$\forall x',x''\in[a,c],|x'-x''|<\delta$分类讨论:

当x',x''同属于$[a,b]$或$[b,c]$时,由(1)、(2)知结论成立;

当x',x''不同属于$[a,b]$或$[b,c]$时,不妨设$x'\in[a,b],x''\in[b,c]$。则由(3)可得式(4)。

$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(b)|+|f(x'')-f(b)|<\varepsilon$　　（4）

综上,f在$[b,c]$上一致连续。

命题2 设f在I上满足Lipshcitz条件,则f在I上一致连续。

很显然,此结论是成立的。根据f在I上一致连续的定义,只需要取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$即可。但命题2的逆命题不成立。

命题3[1] 函数$f(x)$在I上一致连续的充要条件是: $\forall\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$,若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$。则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$。

命题4 设函数$f(x)$在(a,b)上连续,则$f(x)$在(a,b)上一致连续的充要条件是:

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在。(南开大学,山东大学)

证明:必要性。由$f(x)$在(a,b)上一致连续。$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in(a,b)$,当$|x'-x''|<\delta$时,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。特别的,当$x',x''\in(a,a+\delta)$时,肯定有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$成立,当$x',x''\in(b-\delta,b)$时,也必有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

由柯西收敛准则知$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在。

充分性。由函数$f(x)$在(a,b)上连续,且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在。令

$$F(x)=\begin{cases}f(x),x\in(a,b)\ ;\\ f(a+0),x=a\ ;\\ f(b-0),x=b\ 。\end{cases}$$

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续,所以由Cantor定理可知$F(x)$在$[a,b]$上一致连续,当然$f(x)$在(a,b)上一致连续。

命题5 函数$f(x)$在有界区间I上一致连续的充要条件是:当$\{x_n\}$是I上任意一个Cauchy数列时,$\{f(x_n)\}$也是Cauchy数列。(北京师范大学,西北师范大学,河南师范大学)

证明:必要性。由函数$f(x)$在有界区间I上一致连续,则$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in I$,当$|x'-x''|<\delta$时,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

又$\{x_n\}$是I上任意一个Cauchy数列,则对上述的$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$时,$|x_n'-x_n''|<\delta$,则$|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$。故$\{f(x_n)\}$也是Cauchy数列。

充分性(反证法)。若函数$f(x)$在有界区间I上不一致续$\exists\varepsilon>0,\forall\delta_n=\dfrac{1}{n},\exists x',x''\in I$。

虽然$|x_n'-x_n''|<\delta_n$,但是$f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0$因为$\{x_n\}$有界。由致密性定理可知$\{x_n\}$存在收敛的子序列$\{x_{nk}\}$,不妨设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in I$。由

$\left|x_{m_k}-x_0\right|\leq\left|x_{m_k}-x_{n_k}\right|+\left|x_{n_k}-x_0\right|<\dfrac{1}{m_k}+\left|x_{n_k}-x_0\right|\to0(k\to\infty)$。

故$\{x_{nk}\}$和$\{x_{mk}\}$都收敛知,由着两个序列交替构成的新序列也是收敛的。但

$\left|f(x_{n_k})-f(x_{m_k})\right|\geq\varepsilon_0.(\forall k\in N)$。

矛盾。

命题6 函数$f(x)$在区间I上一致续的充要条件是:$f(x)$在区间I上的连续模

$\omega(\delta)=\sup\limits_{\substack{\forall x',x''\in I\\ |x'-x''|<\delta}}\left|f(x')-f(x'')\right|$的极限$\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(\delta)=0$。

证明:必要性。设函数$f(x)$在区间I上一致续。即对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta'>0,\forall x',x''\in I$,当$|x'-x''|<\delta'$时,有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。设$0<\delta<\delta'$,则当$|x_n'-x_n''|\leqslant\delta$时,必有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,从而

$\omega(\delta)=\sup\limits_{\substack{\forall x',x''\in I\\ |x'-x''|<\delta}}\left|f(x')-f(x'')\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$,故$\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(\delta)=0$。

充分性。由$\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(\delta)=0$,定义可得,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta'>0$,当$0<\delta<\delta'$时,$\omega(\delta)<\varepsilon$。

设$x',x''\in I$,且$|x_n'-x_n''|<\delta'$时,若$x'=x''$,则显然$|f(x')-f(x'')|=0<\varepsilon$。若$x'\neq x''$,则令$|x_n'-x_n''|<\delta^*$,则$0<\delta^*<\delta'$,于是$|f(x')-f(x'')|\leqslant\omega(\delta^*)<\varepsilon$由此可知$f(x)$在区间$I$上一致续。

注:运用命题6可得一致连续性的观察法。因为函数$f(x)$的$\omega(\delta)$的只与$f(x)$的图形最陡的地方有关。若$f(x)$的图形在某处无限变陡,使得当$\delta\to0$时,$\omega(\delta)$的值不趋近于0,则$f(x)$是不一致连续的。如$f(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$在x=0处,图形无限变陡。故$f(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$在0的邻域$U(0,\delta)$破坏了一致连续性,这对证明一元函数的非一致连续性的取点有极

大的帮助。当然,若$f(x)$在某处最陡,但$\delta\to0^+$时,变差$|f(x')-f(x'')|\to0$。则$f(x)$一致连续。

2 运用以上命题证明一元函数的一致连续性

以上命题不仅仅是对一致连续性习题的证明应用,也是各高校数学专业考研的常考内容。如北京大学、北京师范大学、南开大学、山东大学等都曾考过上述几个命题的证明。以上命题均可改为$f(x)$在区间I上不一致续的相应命题,即否命题。如命题3的否命题为:

函数$f(x)$在I上不一致连续的充要条件是:

$\exists\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$,虽然$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,但

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)\neq0$ 。

再如命题4的否命题为:

设函数$f(x)$在(a,b)上连续,则$f(x)$在(a,b)上不一致连续的充要条件是:

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 至少有一个不存在。

其余命题的否命题读者可以自己写出来。下面我们用具体的数学专业考研真题来说明我们的命题在相关题型中的运用。

例1 证明:若函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 。则$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。(中国人民大学)

分析:此习题和Cantor定理、命题1、命题4相类似,下面看具体的证明。

证明:由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则$\forall\varepsilon>0$, $\exists M>a$,当x_n', $x_n''>M$时,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。 (5)

又由Cantor定理知,$f(x)$在$[a,M+1]$上一致连续,则$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, $\forall x',x''\in[a,M+1]$

当$|x'-x''|<\delta_1$时,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。 (6)

取$\delta=\min\{1,\delta_1\}$,则当$x',x''\in[a,\infty)$时,$x',x''$要么同属于$[a,M+1)$,要么同属于$[M,+\infty)$,故由(5)、(6)知$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。即$f(x)$在$[M,+\infty)$上一致连续。

注:此真题的证明是命题1的简化证明。运用了一点小技巧把区间分成了$[a,M+1]$和$[M,+\infty)$,再运用$\delta=\min\{1,\delta_1\}$,将$x',x''$的距离控制在了$\delta(<1)$内,这也是数学分析常用的证明技巧。

例2 证明:在$g(x)=\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续。(中国科学院)

分析:此真题考察函数$f(x)$在I上的不一致连续性,则由命题6可以判断$g(x)$在$x=0$的附近一致连续性被破坏,再由简单的三角函数知识可取相应的点。下面我们分别用用命题2或4的否命题来直接证明。

证明一:取 $x_n'=\dfrac{1}{2n\pi}$,$x_n''=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,则当n充分大时,$x',x''\in(0,1)$,

且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n\pi}-\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)=0$ 。但

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin(2n\pi)-\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=1\neq0$ 。

故$g(x)=\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续。

证明二:由$\lim\limits_{x\to1^-}\sin\frac{1}{x}=\sin1$存在,但$\lim\limits_{x\to0^+}\sin\frac{1}{x}$不存在。事实上,根据函数极限的定义,$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$,

取$x_n'=\dfrac{1}{2n\pi}$,$x_n''=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,虽然$x_n',x_n''\in U^o(0;\delta)$,但

$\left|g(x_n')-g(x'')_n\right|=1\geq\varepsilon_0$。故$\lim\limits_{x\to0^+}\sin\frac{1}{x}$不存在。所以$g(x)=\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续。

例3 用一致连续函数的定义证明: $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(a,\infty)$ $(a>0)$上一致连续,而在区间$(0,a)$上非一致连续。(北京交通大学)

证明:ⅰ. 对任意$x',x''\in(a,+\infty)$,由

$$\begin{aligned}\left|f(x')-f(x'')\right|&=\left|\frac{1}{x'}\sin\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\sin\frac{1}{x''}\right|\\&=\left|\frac{1}{x'}\sin\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\sin\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\sin\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\sin\frac{1}{x''}\right|\\&\leq\left|\frac{1}{x'}\sin\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\sin\frac{1}{x'}\right|+\left|\frac{1}{x''}\sin\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\sin\frac{1}{x''}\right|\end{aligned}$$

$$\leq\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|+\left|\frac{1}{x''}\right|\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|\leq\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|+\left|\frac{1}{x''}\right|\left|2\cos\frac{\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}}{2}\sin\frac{\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}}{2}\right|$$

$$\leq\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|+\left|\frac{2}{x''}\right|\frac{\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|}{2}=\left(1+\frac{1}{|x''|}\right)\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{a}\right)\frac{1}{a^2}\left|x'-x''\right|=L\left|x'-x''\right|\ 。$$

其中$L=\left(1+\frac{1}{a}\right)\frac{1}{a^2}>0$ 。故对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\frac{\varepsilon}{L}$,当$x'$, $x''\in(a,+\infty)$且$|x'-x''|<\delta$时,$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。所以$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(a,+\infty)$ $(a>0)$上一致连续。

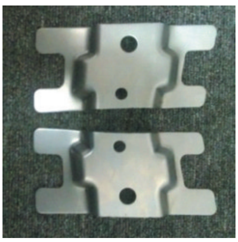
ⅱ.证明$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(0,a)$上非一致连

(下转第32页)

a. 发动机油底壳

b. 横梁连接件

c. 罩盖钣金件



d. A柱连接件

e. 箱体隔板

图7　车身常见结构件实冲产品

如图7所示。通过实际冲压验证了对应产品的排样设计是合理的,排样工艺对不同载体类型的车身结构件具有实际参考价值。

4 结语

对车身常见结构件三维模型进行了工艺分析,并应用CAD技术对其进行了排样设计,用UG软件绘制了常见结构件的排样图,根据排样图所设计的级进模试模情况验证了排样工艺的合理性。

目前对于级进冲压成形料带排样仍然难以实现智能化设计,因为排样工艺方案与工艺参数难以智能量化,而且实际冲压过程中冲床、模具以及材料三者的微观不确定性因素约束了设计理论,但随着智能软件和CAD技术的进一步发展,智能化设计技术将能够更准确地设计级进模排样,从而能够更高效地指导生产实践。

参考文献:

[1] 黄昭明,王利,刘小飞,等.基于Autoform多工位连续冲压成形数值模拟[J].合肥工业大学学报(自然科学版),2015,38(2):157−160.

[2] 罗林,黄昭明,沈现青,等.高复杂度轿车横梁多工位传递模排样设计[J].长春工程学院学报(自然科学版),2018,19(3):15−18.

[3] 金龙建,陈炎嗣.多工位级进模排样工艺分析[J].模具制造,2012,12(10):44−50.

[4] 涂小文. AutoForm原理技巧与战例使用手册[M].武汉:湖北科学技术出版社,2013:374−378.

[5] 于红,章志兵,柳玉起,等.基于NX平台的级进模连续展开系统[J].塑性工程学报,2012,19(6):35−39.

[6] 于红.基于NX的级进模连续展开技术研究与开发[D].武汉:华中科技大学,2013.

[7] 赵殿明,黄昭明,陈华,等.多弯角车身钣金件多工位级进模设计与应用[J].锻压技术,2020,45(3):125−130.

[8] 王成勇,王思艳,陈勇章,等.宽薄板级进模连续冲裁中线悬弧挠曲控制[J].塑性工程学报,2016,23(1):46−51.

[9] 赵殿明,黄昭明,王利,等.发动机油底壳自动线多工位传递模设计与应用[J].锻压技术,2019(8):137−142.

[10] 王益平,沈义林,黄昭明,等.轿车A柱连接件级进模设计[J].铜业工程,2014(6):83−88+94.

(上接第24页)

续。仿照例2的证明即可。

一元函数的一致连续性是数学分析学的重点和难点,是学生第一次接触这样的概念,也是数学专业考研的常考内容,理论性强,是后继二元函数的一致连续性、级数的一致收敛性等知识的重要基础,本文通过具体的分析和等价命题的形式,集中讨论了一元函数的一致连续性,通过对本文的阅读,希望对数学专业考研的同学有一定的帮助,能让同学们掌握一致连续性的相关证明方法和技巧。

参考文献:

[1] 华东师范大学数学系.数学分析:上册[M].4版.北京:高等教育出版社,2010.

[2] 刘勇.关于一元函数一致连续性的讨论[J].赤峰学院学报(自然科学版),2009(11):7−10.

[3] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].2版.北京:高等教育出版社,2006.

[4] 汪林.数学分析中的问题与反例[M].昆明:云南科技出版社,1990.