doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2019.04.010

求极限的若干方法及探讨

阿力非日,张　艳
(西昌学院彝语言文化学院,四川 西昌 615000)

摘要:从多个角度讨论了求极限的方法。首先介绍了相对简单的极限的求法,探讨了利用单调有界原理及压缩映像原理求极限和利用Stolz定理求极限。其次是对复合函数求极限,应用Topliz定理的关键在于构造一个Topliz变换得到了特殊的解法,求出复杂函数极限。最后总结了数学分析里求极限的各种方法,得出相应极限的类型、原理,并列举例题。

关键词:单调有界原理;压缩映像原理;Stolz定理;Toplitz定理;罗比塔法则;泰勒公式
中图分类号:O171　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1673-1891(2019)04-0048-04

Some Methods for Solving the Limit and Discussions

ALI Feiri, ZHANG Yan
(School of Yi Language and Culture, Xichang University, Xichang, Sichuan 615000, China)

Abstract: In this paper we discuss different methods for solving the limit. First we introduce the relatively easier methods of the monotonic bounded principle and the compression image principle and the Stolz theorem to solve the limit. Second, we discuss the methods to solve the limit of a complex function, and we point out that the key to applying the Topliz theorem is to construct a Topliz transformation to obtain a special solution to the limit of a complex function. Based on these, we summarize the various methods for limit solutions in mathematical analysis. Finally, corresponding limit types and principles are concluded, and examples are given.

Keywords: monotonic bounded theorem; compression image principle; Stolz theorem; Toplitz theorem; Robita's Rule; Taylor formula

数学源于生活,应用于生活。极限概念是求某些实际问题的精确解答而生,是微积分学的基础,求极限的方法多种多样,现对求极限的方法进行总结。

1 常用求极限的基本方法

1.1 约去零因子求极限

例1　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=4$

1.2 分子分母同除求极限

例2　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{3x^3+1}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{3}$

注　一般分子分母同除x的最高次方;这只是对当$x\to\infty$时,有理函数的情况而言

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & m>n\\ \infty & m<n\\ \dfrac{a_n}{b_n} & m=n\end{cases}$$

1.3 分子(母)有理化求极限

例3　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right)}=0$$

1.4 应用两个重要极限求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\text{和}\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

例4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

收稿日期:2019-05-21
作者简介:阿力非日(1986—),男,四川布拖人,助教,硕士,研究方向:非线性分析。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{(-x)\cdot(-1)}=e^{-1}$

例5　求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$

解：$\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}$

1.5 用等价无穷小量代换求极限

1.5.1 常见等价无穷小有:

当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^{x}-1$,

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2},(1+ax)^{b}-1\sim abx$

例6 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^{2})^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^{2})^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^{2}}{-\frac{1}{2}x^{2}}=-\frac{2}{3}$

1.6 用罗必塔法则求极限

1.6.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式极限

例7 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos2x-\ln(1+\sin^{2}x)}{x^{2}}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos2x-\ln(1+\sin^{2}x)}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-2\sin2x}{\cos2x}-\frac{\sin2x}{1+\sin^{2}x}}{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\left(\frac{-2}{\cos2x}-\frac{1}{1+\sin^{2}x}\right)=-3$$

1.6.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限

例8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

例9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{3x^{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{6}=+\infty$

注:①必须注意判定是不是不定式的极限;②是否满足罗比塔法则的条件。比如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$ 这个很简单的极限,虽然是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,但若不顾条件盲目使用罗比塔法则:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

这就会由右端极限不存在推出原极限也不存在的错误结论。

1.7 利用Taylor公式求极限

例10 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{x}+a^{-x}-2}{x^{2}}$

解：由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{x}+a^{-x}-2}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{2}\ln^{2}a+o(x^{2})}{x^{2}}=\ln^{2}a$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{x}+a^{-x}-2}{x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^{2}\ln^{2}a+o(x^{2})}{x^{2}}=\ln^{2}a$$

$a^{x}+a^{-x}-2=x^{2}\ln^{2}a+°(x^{2})$。

故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{x}+a^{-x}-2}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{2}\ln^{2}a+o(x^{2})}{x^{2}}=\ln^{2}a$

例11 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^{2}}{2}}}{x^{4}}$。

解：由当 $x\to0$ 时，$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$,

$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+o(x^{n})$.

所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^{2}}{2}}}{x^{4}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{24}+o(x^{4})-\left(1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{8}+o(x^{4})\right)}{x^{4}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^{4}+o(x^{4})}{x^{4}}=-\frac{1}{12}.$$。

注:泰勒公式方法求极限是比罗必塔法则更为实用的方法,但前提是要对常见函数的泰勒展开式熟练记忆。

2 递推形式序列的极限

序列递推形式的极限规律不强,难于下手,是一类较复杂的题目。一般情况下,仅给出了第 n 项与第 $n+1$ 项的关系,例如 $x_{n+1}=2\sqrt{x_{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}$。我们对方法集中讨论,先介绍下单调有界定理、压缩映像原理。

定理 1(单调有界定理)任何有界的单调数列一定有极限。

定理 2(压缩映像原理)对数列 $\{x_n\}$,若存在常数 r,使得对 $\forall n\in N$,恒有

$|x_{n+1}-x_{n}|\le r|x_{n}-x_{n-1}|,(0<r<1)$，

则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

例 12 已知 $x_{0}=1,x_{n+1}=\sqrt{2x_{n}},n=0,1,2,\cdots\cdots$ 证明序列 $\{x_n\}$ 存在极限,并求其值。

解:有界性证明。因为 $x_0=1$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_{n}}$，下面用数学归纳法证明:$\forall n$,$x_n<2$。事实上,当 $n=1$ 时,$x_1=\sqrt{2}<2$ 成立,不妨设当 $n=k$ 时,$x_k<2$ 成立,则当 $n=k+1$ 时,$x_{k+1}=\sqrt{2x_{k}}<\sqrt{2\times2}=2$。所以序列 $\{x_n\}$ 有上界。

单调性证明。根据题意,$x_n>1$,设 $f(x)=\sqrt{2x}$ 则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}>0$，所以函数 $f(x)=\sqrt{2x}$ 在[1,2]上单调递

增,从而序列$\{x_n\}=\{f(x)\}$单调递增。

根据单调有界定理可知系列$\{x_n\}$存在极限,不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则由$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$,有$a=\sqrt{2a}$,解得$a=0$(舍)或$a=2$。所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。

例13 设$x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$($c>1$为常数),求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解Ⅰ(用单调有界原理):若$x_1=\sqrt{c}$,则$x_n=\sqrt{c}(\forall n\in N)$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$。若$x_1>\sqrt{c}$,因$f(x)\equiv\dfrac{c(1+x)}{c+x}=c-\dfrac{c(c-1)}{c+x}$严格递增,所以

$$\forall n\in N, x_n>\sqrt{c},\text{则有}x_{n+1}=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}=f(x_n)>f(\sqrt{c})=\sqrt{c}$$

因而由$x_1>\sqrt{c}$可知一切$x_n>\sqrt{c}$。又因为$x_{n+1}-x_n=\dfrac{c-x_n^2}{c+x_n}<0$,知$x_n$严格递减,根据单调有界原理知,$\{x_n\}$收敛。

同理,当$0<x_1<\sqrt{c}$时,对一切$x_n<\sqrt{c}$,x_n严格递增。总之$\{x_n\}$单调有界,极限存在,在$x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$中取极限,可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$。

解Ⅱ(用压缩映像原理求极限):

因$x_n>0$,且当$x>0$时,$f'(x)=\left[\dfrac{c(1+x)}{c+x}\right]'=\dfrac{c(c-1)}{(c+x)^2}>0$,又由$c>1$知

$$0<f'(x)=\frac{c(c-1)}{(c+x)^2}\le\frac{c(c-1)}{c^2}=1-\frac{1}{c}\le 1。$$

故$x_{n+1}=f(x_n)$为压缩映像,$\{x_n\}$收敛,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$。

3 运用Stolz定理求极限

用通常方法进行证明和计算一些分子分母为求和式的比式极限题目是非常繁琐的,但是用Stolz定理就会迎刃而解,达到事半功倍的效果。

定理1 ($\dfrac{\infty}{\infty}$型*stolz*公式)设$\{x_n\}$严格递增,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$。若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a$(有限数),则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=a$。

定理2 ($\dfrac{0}{0}$型*stolz*公式)设$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,$\{x_n\}$严格单调递减,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=a$(其中$a$为有限数,$+\infty$或$-\infty$)。

例14 **求证** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\left(\sqrt{n-1}+\cdots+\sqrt{2}+1\right)=\dfrac{1}{3}$

证明 因为$\{\sqrt{n^3}\}$单调递增且趋于$+\infty$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\left(\sqrt{n-1}+\cdots+\sqrt{2}+1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}-\sqrt{(n-1)^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{n^3}+\sqrt{(n-1)^3}}{3n+3n^2}$$

$$=\frac{1}{3}。$$

例15 设$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_1+\frac{1}{2}s_2+\cdots+\frac{1}{n}s_n}{\ln n}$。

证明 因为$\{\ln n\}$单调递增且趋于$+\infty$,又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}s_{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}}{\ln(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=s$$

故由Stolz定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+\frac{1}{2}s_2+\cdots+\frac{1}{n}s_n}{\ln n}=s$$

从上面的例题可以得到:利用Stolz定理求极限的形式是有规律的。能够抓住要求极限的特点,发现式子的规律,问题就会变得简单。

4 利用Toplitz变换的极限

若出现$\sum\limits_{j=1}^{i}a_{nj}=1$,对$\forall j\lim\limits_{n\to\infty}a_{nj}=0$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}x_j$的问题,可利用题目中所给的条件,适当变换简化计算。首先介绍一下此定理。

Toplitz定理 设$a_{ij}>0$, $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=1$,对$\forall j,\lim\limits_{n\to\infty}a_{nj}=0$, $y_n=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}x_j$,若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=l$。

例16 设$p>0$,I=0,1,2⋯

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s,$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_0p_n+s_1p_{n-1}+\cdots+s_np_0}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=s$

证明:令$a_{ij}=\dfrac{p_{n-j}}{p_0+p_1+\cdots+p_n}$ ($n=0,1,2,\cdots j=1,2,\cdots$)

则$a_{ij}>0$,$\sum\limits_{j=0}^{n}a_{nj}=1$,$\forall n$,又

$$\forall j, 0\le a_{nj}=\frac{p_{n-j}}{p_0+p_1+\cdots+p_n}\le\frac{p_{n-j}}{p_0+p_1+\cdots+p_{n-j}}\to 0(n\to\infty)$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}a_{nj}=0,\forall j$ 由Topliz定理知:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0p_n+s_1p_{n-1}+\cdots+s_np_0}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=s$$

例17 设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足,$b_n>0$,$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$发散,且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=s$ 试证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n}=s\text{ 。}$$

证明:令 $a_n=\frac{b_j}{b_0+b_1+\cdots b_n}$ (n=0,1,2,⋯,j=0,1,2,⋯),则$a_{ij}>0$,$\sum_{j=0}^{n} a_{nj}=1$ 又 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 发散,所以对任意的j,$\lim_{n\to\infty} a_{nj}=0$,故由*Topliz*定理知,$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n}=s$ 。

注:应用Topliz定理求极限的关键在于构造一个Topliz变换,其构造方法一般需要分析表达式的结构得出,最后验证条件,但应注意要具体条件具体分析,要学会灵活运用。

5 结语

在数学专业考研和理工科类考研的数学中,求极限是必考内容。掌握好求极限的各种方法至关重要。求极限的方法多种多样,坚持问题导向,不能机械的套用某种方法。比如单调有界定理和压缩映像原理,它对于序列递推形式的极限非常有用;Stolz定理对于一些分子分母为求和式的比式极限题目是快捷有效的方法。另外还有运用数学归纳法求极限,级数法求极限,积分法求极限,海因定理求极限,中值定理求极限,夹逼定理法求极限,泰勒展式求极限,等价无穷小量求极限,积分中值定理求极限等等。考研数学中大部分的求极限题,不会单单只用一种方法就能做出来,往往需要多种方法混合灵活使用。

参考文献:

[1] 华东师范大学数学系.数学分析(第四版)上册[M].北京:高等教育出版社,2010.

[2] 斐礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,2006.

[3] 刘玉琏.数学分析讲义练习题选讲[M].北京:高等教育出版社,1984.

[4] 张效先,王金耀.数学分析[M].济南:山东人民出版社,1980.

[5] 刘玉琏.数学分析[M].北京:高等教育出版社,1991.

[6] 费定晖.吉米多维奇数学分析习题解[M].济南:山东科技大学出版社,2003.

[7] 胡适耕.大学数学解题艺术[M].湖南:湖南大学出版社,1982.

(责任编辑:曲继鹏)