doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2019.02.014

机制转换下考虑通胀的脆弱期权定价

李 钰[1],李 娟[2],石学芹[3],吕会影[1]
(1.安徽机电职业技术学院公共基础教学部,安徽 芜湖 241000;2.芜湖职业技术学院经济管理学院,安徽 芜湖 241000;3.安徽工程大学数理学院,安徽 芜湖 241000)

摘要:在机制转换框架下研究了带通胀影响的脆弱欧式期权定价模型。首先,使用消费篮子价格方程来折现股票价格和期权卖方资产价格,导出更符合实际市场的动力学方程;其次,对方程中的扩散部分采用Esscher转换建立相应的等价鞅测度;最后,利用拉普拉斯变换得到了脆弱欧式看涨期权价格的闭型解。

关键词:最优投资组合;通胀;Esscher变换;随机微分方程
中图分类号:F830.91;F224.9 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-1891(2019)02-0063-04

Pricing Vulnerable Options Regarding Inflation under Regime Switching

LI Yu[1], LI Juan[2], SHI Xueqin[3], LÜ Huiying[1]
(1.Department of Public Basic Courses Teaching,Anhui Technical College of Mechanical and Electrical Engineering,Wuhu, Anhui 241000, China; 2.School of Economics and Management, Wuhu Institute of Technology, Wuhu, Anhui 241000, China;3. School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu, Anhui 241000, China)

Abstract: In this paper, we study the pricing of vulnerable European options under inflation. Firstly, we use the basket price equation to discount the stock price and the asset value of the option seller, and derive more market practical dynamics equations. Secondly, we adopt the Esscher Transform for the diffusion parts of the equations to determine an equivalent martingale measure. Finally, a closed-form solution for prospective vulnerable European options is obtained by using Laplace Transform.

Keywords: optimum investment portfolio; inflation; Esscher transform; stochastic differential equation

0 引言

Johnson和Stulz[1]首次将信用风险带入期权定价问题中,并将其称之为脆弱期权。现在在脆弱期权问题的研究中,主要有2种建模方式:结构化模型和约化模型。文献[1]中对于违约风险建立结构化模型,并提出了脆弱期权的定价问题。Hull和White[2]使用约化模型来研究脆弱期权的定价。Klein[3]扩展了前面的研究成果,假设信用风险与标的资产价值相关,建立了相应的脆弱期权定价公式。在文献[3]的基础上,学者们展开了脆弱期权定价问题的探讨。不用于以往的常值边界,Klein和Inglis[4]研究了违约边界同时依赖于期权标的资产和期权卖方负债的脆弱期权定价问题。Huang和Liu[5]研究了不完备市场下的脆弱期权定价。Xu等[6]研究了股票价格和期权卖方资产价格均服从跳-扩散过程下的脆弱期权定价方法。Niu和Wang[7]研究了当期权卖方资产价格服从跳-扩散过程,并与标的资产价格相关时的脆弱欧式期权定价。另外机制转换和通胀对期权定价的影响也慢慢受到各方的关注。Fei[8]研究了在通胀和马尔科夫机制转换下的最优消费投资决策问题。

为了导出更有实际意义的脆弱期权定价模型,文中假设标的资产价格和期权卖方资产价格均服从n维Markov机制转换下带有通胀的动力学过程,在测度变换的基础上通过二维拉普拉斯变换得到欧式脆弱期权的定价公式。

1 模型描述

正如Klein(1996)和其他论文中讨论的,脆弱期权是指含有信用风险的期权,即期权卖方可能在期权到期日违约。因此,脆弱期权的价格是由到期时期权标的资产价格和期权卖方资产价格共同决定的。

收稿日期:2019-03-02
基金项目:安徽省高校自然科学重点研究项目(KJ2017A550)。
作者简介:李钰(1987—),女,安徽芜湖人,讲师,硕士,研究方向:金融数学和金融工程。

假设市场中存在着3种可交易资产,即1份无风险资产(国债B_t)和2份风险资产(股票价格S_t和期权卖方资产价格V_t),并将市场经济状态建模为一个连续隐马尔科夫过程$X=\{X_t;t\geqslant 0\}$,其有限状态空间为$\{e_1,e_2,\cdots,e_N\}$,$e_1=(0,\cdots,1,\cdots0)^T\in R^N$(1为第$i$个分量)。记$X$的生成元矩阵为$\boldsymbol{A}$,那么由Elliott(1994)可知,$X$的半鞅分解为

$$X_t=X_0+\int_0^t \boldsymbol{A}X_s\mathrm{d}s+M_t$$

其中,$M=\{M_t;t\geqslant 0\}$是一个R^N实值鞅。

1.1 资产定价模型

给定一个完备概率空间(Ω,F,P),$T>0$为终端交易时间,其中P为真实的概率测度。在测度P下,本文假设期权标的资产(股票)价格和期权卖方资产价格动力学方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\mu_t\mathrm{d}t+\sigma_{1t}\mathrm{d}W_{1t}\ ,\quad \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t}=b_t\mathrm{d}t+\sigma_{2t}\mathrm{d}W_{2t}$$

其中,W_{1t}和W_{2t}均为(Ω,F,P)上的标准布朗运动,股票期望收益率μ_t、股票价格波动率σ_{1t}以及期权卖方资产价格期望收益率b_t、波动率σ_{2t}都依赖于市场经济状态X,所以将它们定义为

$\mu_t=\langle\mu,X_t\rangle$,$b_t=\langle b,X_t\rangle$,$\sigma_{1t}=\langle\sigma_1,X_t\rangle$,$\sigma_{2t}=\langle\sigma_2,X_t\rangle$

由费为银和李淑娟[9]的研究可知,消费篮子价格动力学方程如下

$$\mathrm{d}G_t=G_t(I\mathrm{d}t+\xi\mathrm{d}W_t^I),$$

其中,G_t表示的是消费篮子价格。

利用$I\hat{t}o$公式可以得到相应的对数篮子价格:

$$\mathrm{d}L_t=(I-\frac{1}{2}\xi^2)\mathrm{d}t+\xi\mathrm{d}W_t^I,$$

其中,$L_t=\ln G_t$,I、ζ均为常数,I表示即期通货膨胀率,ζ表示通胀波动率,W_t^I也为(Ω,F,P)上的标准布朗运动。由于通胀与市场经济是息息相关的,所以假定W_{1t}、W_{2t}和W_t^I的相关系数分别为p_{13}和p_{23},即$E[\mathrm{d}W_{1t}\mathrm{d}W_t^I]=p_{13}\mathrm{d}t$,$E[\mathrm{d}W_{2t}\mathrm{d}W_t^I]=p_{23}\mathrm{d}t$。

文中将建立考虑通胀的股票价格动力学方程$\tilde{S}_t=S_te^{-L_t}$和期权卖方资产价格动力学方程$\tilde{V}_t=V_te^{-L_t}$,以迎合市场实际情形。利用$I\hat{t}o$公式可得:

$$\mathrm{d}\tilde{S}_t=\tilde{S}_t[(\mu_t+\xi^2-I-\xi\sigma_{1t}\rho_{13})\mathrm{d}t+\sigma_{1t}\mathrm{d}W_{1t}-\xi\mathrm{d}W_t^I]$$

$$\mathrm{d}\tilde{V}_t=\tilde{V}_t[(b_t+\xi^2-I-\xi\sigma_{2t}\rho_{23})\mathrm{d}t+\sigma_{2t}\mathrm{d}W_{2t}-\xi\mathrm{d}W_t^I]$$

令$d\hat{W}_{1t}=\dfrac{\sigma_{1t}\mathrm{d}W_{1t}-\xi\mathrm{d}W_t^I}{\sqrt{(\sigma_{1t})^2+\xi^2-2\xi\sigma_{1t}\rho_{13}}}$,$d\hat{W}_{2t}=\dfrac{\sigma_{2t}\mathrm{d}W_{2t}-\xi\mathrm{d}W_t^I}{\sqrt{(\sigma_{2t})^2+\xi^2-2\xi\sigma_{2t}\rho_{23}}}$,

此处$\hat{W}_{1t}$和$\hat{W}_{2t}$均为(Ω,F,P)上的标准布朗运动,且2者间的相关系数记为p_{12},即 $E\left[\mathrm{d}\hat{W}_{1t}\mathrm{d}\hat{W}_{2t}\right]=\rho_{12}\mathrm{d}t$ 再令 $\tilde{\mu}_t=\mu_t+\xi^2-I-\xi\sigma_{1t}\rho_{13}$,$\tilde{b}_t=b_t+\xi^2-I-\xi\sigma_{2t}\rho_{23}$,$\tilde{\sigma}_{it}=\sqrt{(\sigma_{it})^2+\xi^2-2\xi\sigma_{it}\rho_{i3}}$,$i=1,2$,从而相应动力学方程可简写为

$$\mathrm{d}\tilde{S}_t=\tilde{S}_t\left(\tilde{\mu}_tdt+\tilde{\sigma}_{1t}d\hat{W}_{1t}\right),\quad \mathrm{d}\tilde{V}_t=\tilde{V}_t\left(\tilde{b}_tdt+\tilde{\sigma}_{2t}d\hat{W}_{2t}\right)$$

1.2 机制转化下的等价鞅测度

本文将对动力学方程中的扩散部分采用Esscher转换建立相应的等价鞅测度。首先定义两个过程Z_{1t}和Z_{2t},分别如下所示:

$$Z_{1t}=\int_0^t\left(\tilde{\mu}_s-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{1s}^2\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\tilde{\sigma}_{1s}\mathrm{d}\hat{W}_{1s}\ ,Z_{2t}=\int_0^t\left(\tilde{b}_s-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{2s}^2\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\tilde{\sigma}_{2s}\mathrm{d}\hat{W}_{2s}\ 。$$

设$\{F_t^X\}_{t\geq0}$和$\{F_t^i\}_{t\geq0}$分别是由X和$W_{is}(i=1,2)$生成的自然流,定义相应的$G_t^i=F_t^X\vee F_t^i$,$\{G_t^i\}_{t\geq0}$为σ-域流,并且假设$\theta_{1t}=\langle\theta_1,X_t\rangle$和$\theta_{2t}=\langle\theta_2,X_t\rangle$为2个$g_t^i$可测随机变量。从而在上述假设基础上便可以采用机制转换Esscher变换对扩散过程建立相应的等价鞅测度:

$$\eta_t=\frac{\exp\left(\int_0^t\theta_{1s}\mathrm{d}Z_{1s}+\int_0^t\theta_{2s}\mathrm{d}Z_{2s}\right)}{E\left[\exp\left(\int_0^t\theta_{1s}\mathrm{d}Z_{1s}+\int_0^t\theta_{2s}\mathrm{d}Z_{2s}\right)\middle|F_t^X\right]}.$$

使用$I\hat{t}o$公式可以很容易证明出η_t是一个P-鞅,此处不再赘述,并且可得

$$\eta_t=\exp\left(\int_0^t\theta_{1s}\tilde{\sigma}_{1s}\mathrm{d}\hat{W}_{1s}+\int_0^t\theta_{2s}\tilde{\sigma}_{2s}\mathrm{d}\hat{W}_{2s}-\frac{1}{2}\int_0^t\left((\theta_{1s}\tilde{\sigma}_{1s})^2+(\theta_{2s}\tilde{\sigma}_{2s})^2+2\rho_{12}\theta_{1s}\theta_{2s}\tilde{\sigma}_{1s}\tilde{\sigma}_{2s}\right)\mathrm{d}s\right)$$

从而可以定义出新的概率测度$\tilde{P}$,即

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathcal{G}_T}=\eta_T\quad 。$$

命题1 由Girsanov定理可知$\bar{W}_{1t}$和$\bar{W}_{2t}$均为$\tilde{P}$下的标准布朗运动,且2者之间的相关系数依旧为p_{12}

$$\bar{W}_{1t}=\hat{W}_{1t}-\int_0^t\theta_{1s}\tilde{\sigma}_{1s}ds-\rho_{12}\int_0^t\theta_{2s}\tilde{\sigma}_{2s}ds,\quad \bar{W}_{2t}=\hat{W}_{2t}-\int_0^t\theta_{2s}\tilde{\sigma}_{2s}ds-\rho_{12}\int_0^t\theta_{1s}\tilde{\sigma}_{1s}ds$$

通过Girsanov定理直接计算,可以很轻松证明出上面的命题,此处不再赘述。

无套利“本质”上意味着存在等价鞅测度,在等价鞅测度下,风险资产价格过程是一个鞅。为了在机制转换下对脆弱期权定价,需要确定$\theta_{it}(i=1,2)$,使得测度$\tilde{P}$在更大的域流下仍是等价鞅测度,命题2给出了结果。

命题2 若$\tilde{P}$是一个等价鞅测度,当且仅当$\theta_{it}(i=1,2)$满足以下式:

$$\begin{cases}\tilde{\mu}_t+\rho_{12}\theta_{2t}\tilde{\sigma}_{1t}\tilde{\sigma}_{2t}+\theta_{1t}\tilde{\sigma}_{1t}^2=r\\ \tilde{b}_t+\rho_{12}\theta_{1t}\tilde{\sigma}_{1t}\tilde{\sigma}_{2t}+\theta_{2t}\tilde{\sigma}_{2t}^2=r\end{cases}\quad 。$$

直接求解出命题2中的等式,可得

$$\theta_{1t}=\frac{\rho_{12}(\tilde{b}_t-r)\tilde{\sigma}_{1t}+(r-\tilde{\mu}_t)\tilde{\sigma}_{2t}}{(1-\rho_{1t}^2)\tilde{\sigma}_{1t}^2\tilde{\sigma}_{2t}},\quad \theta_{2t}=\frac{\rho_{12}(\tilde{\mu}_t-r)\tilde{\sigma}_{2t}+(r-\tilde{b}_t)\tilde{\sigma}_{1t}}{(1-\rho_{1t}^2)\tilde{\sigma}_{2t}^2\tilde{\sigma}_{1t}}\quad 。$$

在上述结论的基础上,可以获得新的动力学方程:

$$\mathrm{d}\tilde{S}_t=\tilde{S}_t\left(r_t\mathrm{d}t+\tilde{\sigma}_{1t}\mathrm{d}\bar{W}_{1t}\right),\quad \mathrm{d}\tilde{V}_t=\tilde{V}_t\left(r_t\mathrm{d}t+\tilde{\sigma}_{2t}\mathrm{d}\bar{W}_{2t}\right)$$

其中,$\tilde{\sigma}_{it}=\sqrt{(\sigma_{it})^2+\xi^2-2\xi\sigma_{it}\rho_{i3}}\,(i=1,2)$ 。

2 脆弱欧式期权定价

在本节中将考虑机制转换下脆弱欧式期权定价的问题。在风险中性测度$\tilde{P}$下,脆弱欧式期权在0时刻的价格$C(S,V,X)$可以由下面的折现期望给定。

$$C(S,V,X)=E^{\tilde{P}}\left[e^{-rT}\left(S_T-K\right)^+1_{\{V_T\geq V_B\}}+e^{-rT}\frac{(1-\gamma)V_T\left(S_T-K\right)^+}{D}1_{\{V_T<V_B\}}\right].$$

令$k=-\ln(K)$,$y=-\ln(V_B)$,$\tilde{y}=\ln(V_B)$,从而将上式改写为:

$$\begin{aligned}C(k,y,\tilde{y})&\coloneqq C(S,V,X)\\&=E^{\tilde{P}}\left[e^{-rT}\left(S_T-e^{-k}\right)^+1_{\{V_T\geq e^{-y}\}}\right]+\frac{(1-\gamma)}{D}E^{\tilde{P}}\left[e^{-rT}V_T\left(S_T-e^{-k}\right)^+1_{\{V_T<e^{-\tilde{y}}\}}\right]\\&\coloneqq E^{\tilde{P}}\left[C_1(k,y)\right]+E^{\tilde{P}}\left[C_2(k,\tilde{y})\right],\end{aligned}$$

其中,$C_1(k,y)=E^{\tilde{P}}\left[e^{-rT}\left(S_T-e^{-k}\right)^+1_{\{V_T\geq e^{-y}\}}\middle|F_T^X\right]$,

且$C_2(k,\tilde{y})=E^{\tilde{P}}\left[\frac{(1-\gamma)}{D}e^{-rT}V_T\left(S_T-e^{-k}\right)^+1_{\{V_T<e^{-\tilde{y}}\}}\middle|F_T^X\right]$。

为了推导出期权定价公式$C(k,y,\tilde{y})$,首先需要计算出信息流F_T^X下的条件脆弱欧式看涨期权的价格。记$J_i=\int_0^T\langle X_s,e_i\rangle ds$为过程$X$在整个时间区间$[0,T]$上第$i$个状态中逗留的时间,即$\sum_{i=1}^N J_i=T$。定义

$$\bar{U}_{1T}\cdot T=\int_0^T\tilde{\sigma}_{1t}^2dt=\sum_{i=1}^N\tilde{\sigma}_{1i}^2J_i,\quad \bar{U}_{2T}\cdot T=\int_0^T\tilde{\sigma}_{2t}^2dt=\sum_{i=1}^N\tilde{\sigma}_{2i}^2J_i,$$
$$\bar{U}_{3T}\cdot T=\int_0^T\tilde{\sigma}_{1t}\tilde{\sigma}_{2t}dt=\sum_{i=1}^N\tilde{\sigma}_{1i}\tilde{\sigma}_{2i}J_i\ 。$$

下面开始推导$C_1(k,y)$和$C_2(k,\tilde{y})$的二维拉普拉斯转换解析表达式,从而可以得到在机制转化下脆弱期权价格$C(k,y,\tilde{y})$的拉普拉斯转换。

引理1 对于任意的$\alpha>0$,$\tilde{\alpha}>0$且$\zeta>0$,$C_1(k,y)$和$C_2(k,\tilde{y})$的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}\hat{f}_{1C}(\zeta,\alpha:J_1,J_2,...,J_N)&\coloneqq\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta k-\alpha y}C_1(k,y)dkdy\\&=e^{-rT}\frac{V^\alpha S_0^{\zeta+1}}{\alpha\zeta(\zeta+1)}E^{\tilde{P}}\left[e^{\alpha Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{2C}(\zeta,\tilde{\alpha}:J_1,J_2,...,J_N)&\coloneqq\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta k-\tilde{\alpha}\tilde{y}}C_1(k,\tilde{y})dkd\tilde{y}\\&=e^{-rT}\frac{(1-\gamma)S_0^{\zeta+1}}{\tilde{\alpha}\zeta(\zeta+1)DV^{\tilde{\alpha}-1}}E^{\tilde{P}}\left[e^{(1-\tilde{\alpha})Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right].\end{aligned}$$

证明 直接由Fubini定理可计算出上式结果,具体过程参考文献[7]。

基于上面的分析和计算,可以通过二维拉普拉斯变换给出脆弱欧式看涨期权定价公式。定理1是本文的主要结论。

定理1 对于任意的$\alpha>0$,$\tilde{\alpha}>0$且$\zeta>0$,引理1中2个拉普拉斯变换之和即为脆弱欧式看涨期权的定价公式。

$$\begin{aligned}C(k,y,\tilde{y})&=E^{\tilde{P}}\left[C_1(k,y)\right]+E^{\tilde{P}}\left[C_2(k,\tilde{y})\right]\\&=E^{\tilde{P}}\left[\hat{f}_{1C}(\zeta,\alpha:J_1,J_2,...,J_N)\right]+E^{\tilde{P}}\left[\hat{f}_{2C}(\zeta,\alpha:J_1,J_2,...,J_N)\right]\\&=e^{-rT}\frac{V^\alpha S_0^{\zeta+1}}{\alpha\zeta(\zeta+1)}E^{\tilde{P}}\left[e^{\alpha Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]+e^{-rT}\frac{(1-\gamma)S_0^{\zeta+1}}{\tilde{\alpha}\zeta(\zeta+1)DV^{\tilde{\alpha}-1}}E^{\tilde{P}}\left[e^{(1-\tilde{\alpha})Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right],\end{aligned}$$

其中,$E^{\tilde{P}}\left[e^{\alpha Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]=\exp\{(\zeta+\alpha+1)rT\}\langle\exp[A+\mathrm{diag}(\hat{\omega}))T]X,1\rangle$

$$E^{\tilde{P}}\left[e^{(1-\tilde{\alpha})Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]=\exp\{(\zeta-\tilde{\alpha}+2)rT\}\left\langle\exp\left[\left(A+\mathrm{diag}(\tilde{\omega})\right)T\right]X,1\right\rangle,$$

$$\hat{\omega}_i=\frac{1}{2}\zeta(\zeta+1)\sigma_{1i}^2+\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\alpha\right)\sigma_{2i}^2+\rho\alpha(\zeta+1)\sigma_{1i}\sigma_{2i}\ (i=1,\cdots,N),$$

$$\tilde{\omega}_i=\frac{1}{2}\zeta(\zeta+1)\sigma_{1i}^2+\frac{1}{2}\left(\tilde{\alpha}^2-\tilde{\alpha}\right)\sigma_{2i}^2+\rho(1-\tilde{\alpha})(\zeta+1)\sigma_{1i}\sigma_{2i}\ (i=1,\cdots,N)\ 。$$

证明 在引理1的基础上为了得到脆弱期权价格二维拉普拉斯转换的解析解,需要计算出期望$E^{\tilde{P}}\left[e^{\alpha Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]$、$E^{\tilde{P}}\left[e^{(1-\tilde{\alpha})Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]$的表达式。在测度$P$下,

$$Z_t=\int_0^t\left(\tilde{\mu}_s-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{1s}^2\right)ds+\int_0^t\tilde{\sigma}_{1s}d\hat{W}_{1s},\quad Y_t=\int_0^t\left(\tilde{b}_s-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{2s}^2\right)ds+\int_0^t\tilde{\sigma}_{2s}d\hat{W}_{2s}.$$

$E^{\tilde{P}}\left[e^{\alpha Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]=E\left[e^{\alpha Y_T+(\zeta+1)Z_T}\eta_T\middle|F_T^X\right]$,对于$e^{\alpha Y_t+(\zeta+1)Z_t}\eta_t$,在测度$P$下使用伊藤公式可得

$$\begin{aligned}d\left(e^{\alpha Y_t+(\zeta+1)Z_t}\eta_t\right)&=e^{\alpha Y_t+(\zeta+1)Z_t}\eta_t\left((\zeta+1)\left(\tilde{\mu}_t-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{1t}^2\right)+\alpha\left(\tilde{b}_t-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{2t}^2\right)+\frac{1}{2}(\zeta+1)^2\tilde{\sigma}_{1t}^2+\frac{1}{2}\alpha^2\tilde{\sigma}_{2t}^2\right.\\&\left.+\rho\alpha(\zeta+1)\tilde{\sigma}_{1t}\tilde{\sigma}_{2t}\right)dt+e^{\alpha Y_t+(\zeta+1)Z_t}\eta_t\left(\theta_{1t}\tilde{\sigma}_{1t}d\hat{W}_{1t}+\theta_{2t}\tilde{\sigma}_{2t}d\hat{W}_{2t}+(\zeta+1)\tilde{\sigma}_{1t}d\hat{W}_{1t}+\alpha\tilde{\sigma}_{2t}d\hat{W}_{2t}\right)\\&+e^{\alpha Y_t+(\zeta+1)Z_t}\eta_t\left((\zeta+1)\theta_{1t}\tilde{\sigma}_{1t}^2+(\zeta+1)\rho\theta_{2t}\tilde{\sigma}_{1t}\tilde{\sigma}_{2t}+\alpha\theta_{2t}\tilde{\sigma}_{2t}^2+\alpha\rho\theta_{1t}\tilde{\sigma}_{1t}\tilde{\sigma}_{2t}\right)dt\ 。\end{aligned}$$

依据(1)、(2)式,可以将上述等式改写为:

$$\begin{aligned}d\left(e^{\alpha Z_t+(\zeta+1)Y_t}\eta_t\right)&=e^{\alpha Z_t+(\zeta+1)Y_t}\eta_t\left((\zeta+1)\left(r-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{1t}^2\right)+\alpha\left(r-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{2t}^2\right)+\frac{1}{2}(\zeta+1)^2\tilde{\sigma}_{1t}^2+\frac{1}{2}\alpha^2\tilde{\sigma}_{2t}^2\right.\\&\left.+\rho\alpha(\zeta+1)\tilde{\sigma}_{1t}\tilde{\sigma}_{2t}\right)dt+e^{\alpha Z_t+(\zeta+1)Y_t}\eta_t\left(\tilde{\sigma}_{1t}\left(\theta_{1t}+(\zeta+1)\right)d\hat{W}_{1t}+\tilde{\sigma}_{2t}\left(\theta_{2t}+\alpha\right)d\hat{W}_{2t}\right)\ 。\end{aligned}$$

因为$Z_0=Y_0$,且$\eta_0=1$,从而

$$\begin{aligned}E\left[e^{\alpha Y_T+(\zeta+1)Z_T}\eta_T\middle|F_T^X\right]&=\exp\left\{\int_0^T\left((\zeta+1)\left(r-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{1t}^2\right)+\alpha\left(r-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{2t}^2\right)+\frac{1}{2}(\zeta+1)^2\tilde{\sigma}_{1t}^2\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{1}{2}\alpha^2\tilde{\sigma}_{2t}^2+\rho\alpha(\zeta+1)\tilde{\sigma}_{1t}\tilde{\sigma}_{2t}\right)dt\right\}=\exp\left\{(\zeta+1)\left(rT-\frac{1}{2}\bar{U}_{1T}T\right)+\alpha\left(rT-\frac{1}{2}\bar{U}_{2T}T\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{2}(\zeta+1)^2\bar{U}_{1T}T+\frac{1}{2}\alpha^2\bar{U}_{2T}T+\rho\alpha(\zeta+1)\bar{U}_{3T}T\right\}\ 。\end{aligned}\tag{3}$$

另外由Elliott和Osakwe(2005)可知,在风险中性测度$\tilde{P}$下,的拉普拉斯变换为

$$E^{\tilde{P}}\left[\exp\left(\langle\omega,J_T\rangle\right)\middle|X_0=X\right]=\left\langle\exp\left[\left(A+diag(\omega)\right)T\right]X,1\right\rangle\tag{4}$$

ω为R^N中N维列向量,即$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N)^T$。

由式(3)、(4)可得:

$$\begin{aligned}E^{\tilde{P}}\left[e^{\alpha Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]&=E^{\tilde{P}}\left[E^{\tilde{P}}\left[e^{\alpha Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]\right]\\&=E^{\tilde{P}}\left[(\alpha+\zeta+1)rT+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha)\bar{U}_{1T}T+\frac{1}{2}\zeta(\zeta+1)\bar{U}_{2T}T++\rho\alpha(\zeta+1)\bar{U}_{3T}T\right]\\&=\exp\{(\zeta+\alpha+1)rT\}\langle\exp[A+diag(\hat{\omega}))T]X,1\rangle\ 。\end{aligned}$$

同理可得$E^{\tilde{P}}\left[e^{(1-\tilde{\alpha})Y_T+(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]$的表达式,此处不再赘述。

推论1 当$V_B\to0$时,有:

$$\begin{aligned}C(k,y,\tilde{y})&\coloneqq C(S,V,X)=E^{\tilde{P}}\left[e^{-rT}\left(S_T-e^{-k}\right)^+1_{\{V_T\geq e^{-y}\}}\right]\coloneqq E^{\tilde{P}}\left[C_1(k,y)\right]\\&=e^{-rT}\frac{S_0^{\zeta+1}}{\zeta(\zeta+1)}E^{\tilde{P}}\left[e^{(\zeta+1)Z_T}\middle|F_T^X\right]\\&=e^{-rT}\frac{S_0^{\zeta+1}}{\zeta(\zeta+1)}E^{\tilde{P}}\left[\exp\left\{(\zeta+1)\left(rT-\frac{1}{2}\bar{U}_{1T}T\right)+\frac{1}{2}(\zeta+1)^2\bar{U}_{1T}T\right\}\middle|F_T^X\right]\\&=e^{\zeta rT}\frac{S_0^{\zeta+1}}{\zeta(\zeta+1)}\langle\exp[A+diag(\hat{\omega}))T]X,1\rangle\end{aligned}$$

式中,$\langle \exp[A+diag(\hat{\omega}))T]X,1\rangle$ 可以用来决定$(J_1, J_2, \cdots, J_{N-1})$在$\widetilde{P}$下的联合条件概率密度函数,从而将定理1中的定价公式可以简化为Elliott等[10]中欧式看涨期权定价公式。

3 结语

本文讨论了机制转换下考虑通胀的脆弱期权定价。在基础模型中,期权标的资产价格和期权卖方资产价格均考虑了通胀对其的影响。为了更贴合实际,上述2个过程都满足马尔科夫调制模型。基于上述模型,我们借助简约的等价鞅表示方法,通过二维拉普拉斯变换导出了脆弱欧式期权的闭型解。

参考文献:

[1] JOHNSON H, STULZ R. The pricing of options with default risk[J].Finance,1987,42:267−280.

[2] HULL J, WHITE A. The impacts of default risk on the prices of options and other derivative securities[J].Journal of Banking and Finance,1995,19(11):3797−3801.

[3] KLEIN P.Pricing Black−Scholes options with correlated credit risk[J].Journal of Banking and Finance,1996,20:1211−1229.

[4] KLEIN P, INGLIS M. Pricing vulnerable European options when the option's payoff can increase the risk of financial distress[J]. Journal of Banking and Finance,1999: 25,993−1012.

[5] HUANG M W, LIU Y H. Pricing vulnerable options in incomplete markets[J].Journal of Banking and Finance,2005,25: 135−170.

[6] XU W D, XU W, LI H, *et al* jump−diffusion approach to modelling vulnerable option pricing[J].Finance Research Letters,2012,9:48−56.

[7] NIU H W, WANG D C. Pricing vulnerable European options under a two−sided jump model via Laplace transform(in Chinese) [J].Scientia Sinica Mathematica,2015,45(2):195−212.

[8] FEI W Y. Optimal consumption and portfolio under inflation and Markovian switching[J].Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2013, 85(2):272−285.

[9] 费为银,李淑娟.Knight不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究[J].工程数学学报,2012,29(6):799−806.

[10] ELLIOTT R J, CHAN L L, SIU T K. Option pricing and Esscher transform under regime switching[J].Annals of Finance,2005, 1(4),423−432.

(责任编辑:蒋召雪)

(上接第43页)

[11] 胡际权.中国新型城镇化发展研究[D].重庆:西南农业大学,2005.

[12] 徐莉.新型城镇化发展水平评价及其空间特征分析——以江苏省常州市为例[J].中国农业资源与区划,2018,6(6):61−66.

[13] 朱晓静.基于综合指标评价的汉中市新型城镇化水平研究[D].西安:长安大学,2014.

[14] 吴江.重庆新型城镇化推进路径研究[D].重庆:西南大学,2010.

[15] 任庆焕.河北省新型城镇化问题及发展对策研究[D].渤海:天津财经大学,2013.

[16] 牛晓春,杜忠潮,李同昇.基于新型城镇化视角的区域城镇化水平评价——以陕西省10个省辖市为例[J].干旱区地理,2013, 3(2):354−362.

[17] 刘静玉,刘玉振,邵宁宁,等.河南省新型城镇化的空间格局演变研究[J].地域研究与开发,2012,31(5):143−147.

[18] 张涛.德州市新型城镇化建设研究[D].济南:山东大学,2015.

[19] 丁仁船,范海洲,连瑞瑞.安徽省新型城镇化质量评价研究[J].安徽建筑大学学报,2016,10(5):1−8.

[20] 汪轩昌.安徽省新型城镇化水牢综合评价及预测[D].淮南:安徽理工大学,2016.

[21] 徐伟.欠发达平原农区城镇化问题研究——以山东菏泽市为例[D].武汉:华中师范大学,2011.

(责任编辑:蒋召雪)