

Bernoulli算子矩阵求解分数阶微分方程的数值解

杨晓丽^a, 许雷^{b*}

(内江师范学院 a.生命科学学院; b.数学与信息科学学院, 四川 内江 641199)

摘要:提出了一种基于伯努利(Bernoulli)多项式的分数阶微分方程数值求解的新方法,推导了分数导数的Bernoulli运算矩阵,结合Tau法和配方法将分数阶微分方程简化为代数方程组。通过实例说明了该方法的有效性和适用性。

关键词:伯努利多项式;分数阶导数;算子矩阵

中图分类号:O241.8 文献标志码:A 文章编号:1673-1891(2019)02-0055-04

Numerical Solutions of Fractional Differential Equations by Bernoulli Operator Matrix

YANG Xiaoli^a, XU Lei^{b*}

(a.School of Life Sciences; b.School of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang, Sichuan 641199, China)

Abstract: This paper presents a new numerical method for solving fractional differential equations based on Bernoulli polynomials. Bernoulli operation matrix of fractional derivative is deduced, and fractional differential equations are simplified to algebraic equations by combining Tau and collocation methods. The validity and applicability of this method are illustrated by examples.

Keywords: Bernoulli polynomial; fractional derivative; operator matrix

0 引言

分数阶微积分是常微分和积分到任意阶的推广。与整数阶相比,分数阶微分方程在物理现象的模拟上有许多优势^[1]。近几十年来,分数偏微分方程被广泛用于描述工程过程和动力学系统。越来越多的研究人员致力于研究求解分数微分方程以及解的存在性和唯一性。由于分数阶微分算子具有全局性以及偶算子不是其负算子的性质,很难对分数阶微分方程进行求解,因此很多学者对分数阶问题的数值方法进行了研究,针对不同类型的方程提出了不同数值方法。常用的方法包括有限差分方法^[2],有限元方法^[3],谱 Galerkin 方法^[4]以及正交多项式的方法。常用的多项式方法有 Legendre 多项式^[5]、Chebyshev 多项式^[6]、Bernstein 多项式^[7],以及 Bernoulli 多项式^[8]。目前用 Bernoulli 多项式求解分数阶微分方程的文献很少,且运算较为复杂,因此基于分数阶微分算子矩阵的方法,引入 Bernoulli 多项式,结合 Tau 法和配方法将分数阶微分方程转化为线性或者非线性方程组,以降

低问题的复杂性。

1 预备知识

1.1 Caputo 意义下的分数阶微分^[9]

定义1: Caputo 类型的分数阶微分定义

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, & n-1 < \alpha < n, n \in \mathbf{N} \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \end{cases}$$

其中, $\alpha > 0$, n 是比 α 大的最小的整数,对于 Caputo 微分有 $D^\alpha C = 0$, C 为常数。

$$D^\alpha t^\nu = \begin{cases} 0, & \nu \in \mathbf{N}_0, \nu < \lceil \alpha \rceil \\ \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu-\alpha}, & \nu \in \mathbf{N}_0, \nu \geq \lceil \alpha \rceil \text{ 或 } \nu \notin \mathbf{N}, \nu > \lfloor \alpha \rfloor \end{cases}$$

其中, $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整函数, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整, $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ 和整数阶微分相似, Caputo 分数阶微分也具有线性性质:

$$D^\alpha (\gamma f(t) + \delta g(t)) = \gamma D^\alpha f(t) + \delta D^\alpha g(t) \quad (2)$$

其中, γ 和 δ 为常数。

1.2 Bernoulli 多项式的性质^[10]

定义2:定义在[0,1]上的Bernoulli多项式为:

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i \alpha_{n-i} t^i \tag{3}$$

其中, $\alpha_i = B_i(0), i=0,1, \dots, n, B_i(0)$ 为 Bernoulli 数, Bernoulli 数可由公式(4)生成:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(0) \frac{t^i}{i!} \tag{4}$$

Bernoulli 多项式满足以下4个等式:

$$\begin{aligned} B_n(0) &= B_n(1) = \alpha_n, n \neq 1 \\ B'_n(t) &= nB_{n-1}(t), n \geq 1 \\ \int_0^1 B_n(t) dt &= 0, n \geq 1 \\ \int_0^1 B_n(t) B_m(t) dt &= \frac{(-1)^{n+m}}{C_{n+m}^n} \alpha_{n+m} 0, n \geq 1 \end{aligned} \tag{5}$$

根据文献[2], Bernoulli 多项式在区间[0, 1]上形成一个完整的基。

定义: $\mathbf{B}(t)^T = [B_0(t), B_1(t), \dots, B_N(t)]$

$$\begin{bmatrix} B'_0(t) \\ B'_1(t) \\ \vdots \\ B'_{N-1}(t) \\ B'_N(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & N & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} B_0(t) \\ B_1(t) \\ \vdots \\ B_{N-1}(t) \\ B_N(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(t)} \tag{6}$$

其中, $\mathbf{D}^{(1)}$ 为 $(N+1) \times (N+1)$ 维的矩阵。

1.3 Bernoulli 多项式函数逼近

设 $H = L^2([0,1])$, $\{B_0(t), B_1(t), \dots, B_N(t)\} \subset H$ 为 Bernoulli 多项式的集合, $\Upsilon = \text{span}\{B_0(t), \dots, B_N(t)\}$, 则对于 H 空间中的任意函数 $g(t)$, 存在唯一的最佳近似 $\hat{g}(t) \in \Upsilon$:

$$\forall y(t) \in \Upsilon, \|g(t) - \hat{g}(t)\| \leq \|g(t) - y(t)\| \tag{7}$$

式(7)等价于

$$\forall y(t) \in \Upsilon, \langle g(t) - \hat{g}(t), y(t) \rangle = 0 \tag{8}$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, 由于 $\hat{g} \in \Upsilon$, 因此存在唯一的向量 $\mathbf{G}^T = [g_0, g_1, \dots, g_N]$ 得到

$$g \approx \hat{g} = \sum_{n=0}^N g_n B_n(t) = \mathbf{G}^T \mathbf{B}(t)。$$

利用公式(8)得到:

$$\mathbf{G}^T \langle \mathbf{B}(t), \mathbf{B}(t) \rangle = \langle g(t), \mathbf{B}(t) \rangle \tag{9}$$

其中, $\langle \mathbf{B}(t), \mathbf{B}(t) \rangle$ 为 $(N+1) \times (N+1)$ 维的矩阵。

假设 $M = \langle \mathbf{B}(t), \mathbf{B}(t) \rangle$, M 可由(5)式计算。对于任意的 $g(t) \in L^2([0,1])$, 可由 Bernoulli 多项式张开, 即 $g(t) = \mathbf{G}^T \mathbf{B}(t)$,

$$\mathbf{G} = M^{-1} \langle g(t), \mathbf{B}(t) \rangle \tag{10}$$

2 分数阶微分的 Bernoulli 算子矩阵

根据公式(6)可以得到:

$$\frac{d^n \mathbf{B}(t)}{dt} = (\mathbf{D}^{(1)})^n \mathbf{B}(t) \tag{11}$$

其中, $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{D}^{(1)}$ 矩阵中的上标表示矩阵的幂, 因此有, $\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{D}^{(1)})^n, n=1,2, \dots$ 。根据 Bernoulli 多项式的性质, 对于第 i 个多项式 $B_i(t)$, 有:

$$D^\alpha B_i(t) = [0, 0, \dots, 0] B_i(t), i=0,1, \dots, [\alpha], \alpha > 0 \tag{8}$$

定理1: 设 $\mathbf{B}(t)$ 为公式(11)中 Bernoulli 向量, 则: $D^{(\mu)} \mathbf{B}(t) \approx \mathbf{D}^{(\mu)} \mathbf{B}(t)$

其中, $\mathbf{D}^{(\mu)}$ 为 $(N+1) \times (N+1)$ 维的在 caputo 意义上的分数阶微分的运算矩阵, 定义如下:

$$\mathbf{D}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \theta_{[\mu],0,r}^{(\mu)} & \theta_{[\mu],1,r}^{(\mu)} & \dots & \theta_{[\mu],N,r}^{(\mu)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{r=[\mu]}^i \theta_{i,0,r}^{(\mu)} & \sum_{r=[\mu]}^i \theta_{i,1,r}^{(\mu)} & \dots & \sum_{r=[\mu]}^i \theta_{i,N,r}^{(\mu)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{r=[\mu]}^N \theta_{N,0,r}^{(\mu)} & \sum_{r=[\mu]}^N \theta_{N,1,r}^{(\mu)} & \dots & \sum_{r=[\mu]}^N \theta_{N,N,r}^{(\mu)} \end{bmatrix} \tag{13}$$
$$\theta_{i,j,r}^{(\mu)} = \frac{i! \alpha_{i-r}}{(i-r)! \Gamma(r+1-\mu)} c_{r,j}$$

其中, α_i 为 Bernoulli 数, $c_{r,j}$ 可由(10)得到。值得注意的是, 在矩阵 $\mathbf{D}^{(\mu)}$ 中, 前 $[\mu]$ 行系数都为零。

证明:

$$\begin{aligned} D^\mu B_i(t) &= \sum_{r=0}^i C_i^r \alpha_{i-r} D^\mu t^r \\ &= \sum_{r=0}^i \frac{i!}{r!(i-r)!} \alpha_{i-r} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\mu)} t^{r-\mu} \\ &= \sum_{r=0}^i \frac{i!}{(i-r)! \Gamma(r+1-\mu)} \alpha_{i-r} t^{r-\mu} \end{aligned} \tag{14}$$

假设 $t^{r-\mu}$ 能以 Bernoulli 多项式的形式展开, 即

$$t^{r-\mu} = \sum_{j=0}^N c_{r,j} B_j(x) \tag{15}$$

令: $b_{i,r}^{(\mu)} = \frac{i! \alpha_{i-r}}{(i-r)! \Gamma(r+1-\mu)}$, $\theta_{i,j,r}^{(\mu)} = b_{i,r}^{(\mu)} c_{r,j}$, 则

$$\begin{aligned} D^\mu B_i(t) &\approx \sum_{r=[\mu]}^i b_{i,r}^{(\mu)} \sum_{j=0}^N c_{r,j} B_j(x) = \sum_{j=0}^N \left(\sum_{r=[\mu]}^i \theta_{i,j,r}^{(\mu)} \right) B_j(x) \\ D^\mu \mathbf{B}(t) &= \left[\sum_{r=[\mu]}^i \theta_{i,0,r}^{(\mu)}, \sum_{r=[\mu]}^i \theta_{i,1,r}^{(\mu)}, \dots, \sum_{r=[\mu]}^i \theta_{i,N,r}^{(\mu)} \right] \mathbf{B}(t) \end{aligned} \tag{16}$$

3 数值计算方法

3.1 线性分数阶微分方程的求解

考虑 Caputo 意义下的分数阶微分方程具有如下的形式:

$$D^\mu y(t) = a_k D^{\alpha_k} y(t) + a_{k-1} D^{\alpha_{k-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 y(t) + g(t), t \in (0, L) \tag{17}$$

初始条件满足:

$$y^{(i)}(0) = y_i, i = 0, 1, \dots, m-1 \tag{18}$$

其中, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ 为常系数, $\mu \in [m-1, m]$, $g(t)$ 为给定的源函数。

利用 Bernoulli 多项式可以将 $y(t)$ 和 $g(t)$ 近似为:

$$y(t) = \sum_{i=0}^N c_i B_i(t) = C^T \mathbf{B}(t) \quad (19)$$

$$g(t) = \sum_{i=0}^N G_i B_i(t) = G^T \mathbf{B}(t)$$

其中, 向量 G 可以由公式(10)求得, C^T 为未知向量, 根据定理 1, 分数阶微分 $D^\mu y(t)$ 和 $D^{\alpha_j} y(t)$ 可以做如下近似:

$$D^\mu y(t) \approx C^T \mathbf{D}^{(\mu)} \mathbf{B}(t) \quad (20)$$

$$D^{\alpha_j} y(t) \approx C^T \mathbf{D}^{(\alpha_j)} \mathbf{B}(t), j=1, 2, \dots, k$$

因此, 公式(14)的残差 $R(t)$ 可以表示为:

$$R(t) = \left[C^T \mathbf{D}^{(\mu)} - \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{D}^{(\alpha_j)} - a_0 I_{N+1} - G^T \right] \mathbf{B}(t) \quad (21)$$

其中, I_{N+1} 为 $N+1$ 维单位矩阵, 利用经典的 Tau 方法, 我们可以利用如下公式产生 $N-m+1$ 维的线性方程组:

$$\langle R(t), B_i(t) \rangle = \int_0^1 R(t) B_i(t) dt = 0, i=0, \dots, N-m \quad (22)$$

利用初始条件可以得到

$$y^{(i)}(0) = C^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}(0) = y_i, i=0, 1, \dots, m-1 \quad (23)$$

公式(19)和(20)分别生成 $N-m+1$ 和 m 维的线性方程组, 求解线性方程组可以得到未知系数 C^T 。

3.2 非线性分数阶微分方程的求解

对于如下的非线性分数阶微分方程:

$$D^\mu y(t) = F(t, y(t), D^{q_1} y(t), \dots, D^{q_n} y(t)) \quad (24)$$

初始条件如(18)式, $0 < q_1 < \dots < q_n < \mu$, 则 $y(t)$, $D^{\alpha_j} y(t)$ 以及 $D^{\alpha_j} y(t)$ 的近似处理和线性方程一样, 因此残差 $\bar{R}(t)$ 可以表示为:

$$\bar{R}(t) = C^T \mathbf{D}^{(\mu)} \mathbf{B}(t) - F(t, C^T \mathbf{B}(t), C^T \mathbf{D}^{(q_1)} \mathbf{B}(t), \dots, C^T \mathbf{D}^{(q_n)} \mathbf{B}(t)) \quad (25)$$

为了求公式(24)的解, 首先计算公式(25)在 $N-m+1$ 个点的值, 为了得到最优的结果, 本文让配置点选择为 $N-m+1$ 移位勒让德多项式的根。

$$\bar{R}(t) = 0, i=1, 2, \dots, N-m+1 \quad (26)$$

联合公式(23)和(26)得到 $N+1$ 维的非线性方程组, 利用典型的迭代方法, 如牛顿迭代方法就能得到 $y(t)$ 的近似解。

4 实例计算

例 1: 考虑如下非线性初值问题^[11],

$$D^3 y(t) + D^{2.5} y(t) + y^2(t) = t^4, t \in [0, 1] \quad (27)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 2 \quad (28)$$

精确解为 $y(t) = t^2$ 。

假设 $N=3$, 则方程(27)的解可近似为:

$$y(t) = \sum_{i=0}^3 c_i B_i(t) = C^T \mathbf{B}(t)$$

因此, $D^3 y(t) = C^T \mathbf{D}^{(3)} \mathbf{B}(t), D^{2.5} y(t) = C^T \mathbf{D}^{(2.5)} \mathbf{B}(t)$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^{(2.5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.51 & 6.02 & -3.87 & 6.02 \end{bmatrix}$$

因此, 公式(24)和(25)整理为:

$$C^T \mathbf{D}^{(3)} \mathbf{B}(t) + C^T \mathbf{D}^{(2.5)} \mathbf{B}(t) + [C^T \mathbf{B}(t)]^2 - t^4 = 0 \quad (29)$$

$$C^T \mathbf{B}(0) = C^T \mathbf{D}^{(0)} \mathbf{B}(0) = 0, C^T \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{B}(0) = 2 \quad (30)$$

将移位勒让德多项式的第一个根 $t_0=0.5$ 代入公式(26), 结合公式(27), 利用牛顿迭代法得到:

$C^T = [0.33 \ 1 \ 1 \ 0]$ 。因此, $y(t) = C^T \mathbf{B}(t) = t^2$

例 2: 考虑如下线性边界值问题^[12],

$$D^2 y(t) + D^{0.5} y(t) + y(t) = g(t), t \in [0, 1] \quad (31)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, g(t) = t^2 + 2 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{1.5} \quad (32)$$

方程(31)和(32)有精确解 $y(t) = t^2$ 。

假设 $N=3$, 则方程(31)的解可近似为:

$$y(t) = \sum_{i=0}^3 c_i B_i(t) = C^T \mathbf{B}(t)。$$

因此, $D^3 y(t) = C^T \mathbf{D}^{(3)} \mathbf{B}(t), D^{0.5} y(t) = C^T \mathbf{D}^{(0.5)} \mathbf{B}(t)$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(0.5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.752 & 3 & 1.003 & -0.644 & 8 & 1.003 \\ -0.150 & 5 & 0.508 & 1.504 & 5 & -1.367 & 7 \\ -0.010 & 7 & 0.040 & 4 & 0.732 & 7 & 1.890 & 3 \end{bmatrix}$$

因此, 方程(31)和初始条件(32)整理为:

$$R(t) = [C^T \mathbf{D}^{(3)} + C^T \mathbf{D}^{(2.5)} + C^T - G^T] \mathbf{B}(t) \quad (33)$$

$$C^T \mathbf{B}(0) = C^T \mathbf{D}^{(0)} \mathbf{B}(0) = 0 \quad (34)$$

利用 3.1 节的算法得到如下线性方法组:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.752 & 3 & 1.849 & 5 & -0.010 & 7 \\ 1 & -0.5 & 0.166 & 7 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & 0.5 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.935 & 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$C^T = [0.33 \ 1 \ 1 \ 0]$ 。因此, $y(t) = C^T \mathbf{B}(t) = t^2$

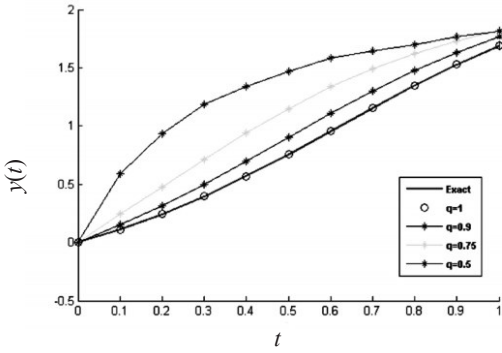


图 1 不同 q 值下的模拟结果

例 3: 考虑如下的非线性分数阶 Riccati 微分方

程^[13]:

$$D^q y(t) = 2y(t) - y^2(t) + 1, 0 < q \leq 1 \quad (35)$$

$$y(0) = 0 \quad (36)$$

参考文献:

- [1] LIU N S, LIN E B. Legendre wavelet method for numerical solutions of partial differential equations[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2010, 26(1): 81-94.
- [2] 邓伟华. 分数阶微分方程的理论分析与数值计算[D]. 上海: 上海大学, 2007.
- [3] JIANG Y J, MA J T. Moving finite element methods for time fractional partial differential equations[J]. Science China Mathematics, 2013, 56(6): 1287-1300.
- [4] LI X J. A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation[J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 2009, 47(3): 2108-2131.
- [5] 陈一鸣, 孙艳楠, 刘立卿, 等. 基于拟 Legendre 多项式求解一类分数阶微分方程[J]. 计算数学, 2015, 37(1): 21-33.
- [6] 杨银. 一类带变系数的空间分数阶偏微分方程的 Chebyshev 拟谱分法[J]. 工程数学学报, 2014(5): 745-752.
- [7] 王金生, 刘立卿, 姚全福. Bernstein 多项式求一类变分数阶微分方程数值解[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2015(8): 983-988.
- [8] AHMAD G. An efficient method based on operational matrices of Bernoulli polynomials for solving matrix differential equations[J]. Computational & Applied Mathematics, 2015, 34(1): 159-175.
- [9] 刘发旺, 庄平辉, 刘青霞. 分数阶偏微分方程数值方法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [10] 何圆, 余亚辉. Frobenius-Euler 多项式的一些乘积公式及其应用(英文) [J]. 数学进展, 2016, 45(4): 520-532.
- [11] JAFARI H, DAS S, TAJADODI H. Solving a multi-order fractional differential equation using homotopy analysis method[J]. Journal of King Saud University-Science, 2011, 23(2): 151-155.
- [12] DOHA E H, EZZ-ELDIEN S S. A Chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 62(5): 2364-2373.
- [13] LI Y L. Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(9): 2284-229.

当 $q=1$ 时, 方程(35)和(36)有精确解:

$$y(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh \left[\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right]$$

图 1 给出了利用 3.2 节的方法, 当 $N=5$ 时, 分别为 1、0.9、0.75 和 0.5 的计算结果, 从图 1 中可以看出, 当 q 接近 1 时, 本文方法的结果能很好地接近精确值。

5 结论

文本提出了解决一类分数阶微分方程的 Bernoulli 矩阵方法。基于 L^2 空间下, 任意函数可由 Bernoulli 多项式展开, 将分数阶的微分方法转化为线性或者非线性方程组进行求解, 降低了方程的计算复杂性, 并通过实例分析证明了算法的有效性。

(责任编辑: 蒋召雪)