第32卷第3期　　西昌学院学报(自然科学版)　　Vol.32,No.3
2018年9月　　Journal of Xichang University(Natural Science Edition)　　Sep.,2018

doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2018.03.012

留数定理在实积分中的应用研究

徐建中
(亳州学院,安徽 亳州 236800)

摘要:留数定理是复变函数中最重要的定理之—,通过应用留数定理将几种实函数积分转化为复函数积分,达到了化难为易,化繁为简的效果,并举例加以说明。

关键词:复变函数;留数定理;积分计算
中图分类号:O174.5　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1673-1891(2018)03-0057-03

Research on the Residue Theorem in the Application of the Real Integration

XU Jian-zhong
(Bozhou Unversity, Bozhou, Anhui 236800, China)

Abstract: The residue theorem is the most important theorem of complex functions.In this paper, it applies the residue theorem to several real function integral into copmplex function integral to achieve the effect of making hard things simple with some examples to illustrate.

Keywords: complex function; the residue theorem; integral calculation

积分的计算在高等数学中有着举足轻重的地位,尤其是在许多交叉学科领域有着广泛的应用。但是在实际的计算过程中,有许多形式的被积函数,原函数不易求出,导致结果无法积出来。而复变函数中的留数定理正好为此类问题提供了重要的理论计算方法。

对于那些难于用解析方法求解的实变函数,我们可以用留数定理加以解决,主要解决思路是将实变函数转化复变函数,借助留数定理进行积分计算、求解。主要是先将其转化为沿闭合回路曲线的积分,然后将问题转化为求解闭合回路内部各个孤立奇点处的留数值,最后,利用留数定理得到被积函数的解,本文主要运用留数定理举例说明并加以归纳总结,以其强调留数定理在积分计算中的应用。

定理 1(留数定理):设函数$f(z)$在回路所围l区域B上除有限孤立奇点$b_1,b_2,\cdots,b_n$外解析,在闭区域B上除$b_1,b_2,\cdots,b_n$外连续,则:

$$\oint f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}\,sf(b_j) \qquad (1)$$

显然,留数定理计算的主要思路就是将回路积分转化为被积函数在回路所围区域上各奇点的留数之和。

1 留数定理在实变函数积分中的应用

1.1 计算 $I=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)dz$ 类型积分

令 $z=e^{i\theta}$,则有$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i},\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$,从而将三角积分转化为复函数的回路积分:

$$I=\oint_{|x|=1}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz} \qquad (2)$$

例1:计算$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos\theta}(0<\varepsilon<1)$

解:按照公式(2)知:

$$I=\oint_{|x|=1}\frac{\mathrm{d}z/iz}{1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}}=\frac{2}{i}\oint_{|x|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon},$$

因为 $\oint_{|x|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}=\frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$,

于是:$I=\frac{2}{i}\frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ 。

例2:计算积分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}$$ 。

收稿日期:2018-04-06
基金项目:安徽省教学研究重点项目(2016jyxm0681);安徽省优秀教学团队(2016jytd080,2015jytd048);安徽省精品资源共享课程(2015gxk089、2016gxk093);安徽省高校优秀青年人才支持计划项目(gxyq2018116);亳州学院自然科学研究项目(BSKY201539)。
作者简介:徐建中(1979—),男,安徽庐江人,副教授,硕士,研究方向:数学教育和微分方程方面的研究。

解:令 $z=e^{i\theta}$,则

$$I=\int_{r:|z|=1}\frac{4z\mathrm{d}z}{i(z^4+6z^2+1)},$$

又命 $z^2=u$,则 $\frac{4z\mathrm{d}z}{i(z^4+6z^2+1)}=\frac{2\mathrm{d}u}{i(u^2+6u+1)}$ 。

当z绕Γ圆周一周时,u亦在其上绕二周,故

$$I=2\int_r\frac{2\mathrm{d}u}{i(u^2+6u+1)}=\frac{4}{i}\int_r\frac{\mathrm{d}u}{u^2+6u+1}$$ 。

被积函数$f(u)$在Γ内部仅有一个一阶级点$u=-3+\sqrt{8}$。

$$\operatorname*{Res}_{u=-3+\sqrt{8}}f(u)=\frac{1}{u+3+\sqrt{8}}\Big|_{u=-3+\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{8}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

所以由留数定理,

$$I=\frac{4}{i}\cdot2\pi i\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$$

若$R(\cos\theta,\sin\theta)$为θ的偶函数,则 $\int_0^{\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 之值亦可由上述方法求之。因此时

$$\int_0^{\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

仍命 $z=e^{i\theta}$,与前同法,我们可将 $\int_{-\pi}^{\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 化为单位圆周Γ上积分。

1.2 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ 类型积分

为了计算这种反常积分,我们先证明一个引理。它主要用来估计辅助曲线 上的积分。

引理1 设F(z)沿圆弧$S_R:z=Re^{i\theta}(\theta_1\le\theta\le\theta_2,R$充分大)上连续,且

$$\lim_{R\to+\infty}zf(z)=\lambda$$

于S_R上一致成立(即与$\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$中的$\theta$无关),则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R}f(z)\mathrm{d}z=i(\theta_2-\theta_1)\lambda \quad (3)$$

证明:$\because i(\theta_2-\theta_1)\lambda=\lambda\int_{S_R}\frac{\mathrm{d}z}{z},$

$$\therefore\left|\int_{S_R}f(z)\mathrm{d}z-i(\theta_2-\theta_1)\lambda\right|=\left|\int_{S_R}\frac{zf(z)-\lambda}{z}\mathrm{d}z\right| \quad (4)$$

对于$\forall\varepsilon>0$,由已知条件知,$\exists R_0(\varepsilon)>0$ 使得 $R>R_0$ 时,有下等式。

$$|zf(z)-\lambda|<\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1},z\in S_R$$

于是(4)式不超过$\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\bullet\frac{l}{R}=\varepsilon$(其中$l$为$S_R$的长度,即$l=R(\theta_2-\theta_1)$)。

例3:设$a>0$,计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}$ 。

解:因 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4},f(z)=\frac{1}{z^4+a^4},$

它一共有四个一阶级点

$$a_k=ae^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}(k=0,1,2,3),$$

且符合定理

设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理公式,其中

$P(z)=c_0z^m+c_1z^{m-1}+...+c_m(c_0\neq0)$与$Q(z)=b_0z^n+b_1z^{n-1}+...+b_n(b_0\neq0)$

为互质多项式,且符合条件:(1)n-$m\geqslant2$;(2)在实轴上Q(z)≠0,于是有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z)$$

而 $\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=a_k}=\frac{1}{4a_k^3}=\frac{a_k}{4a_k^4}=-\frac{a_k}{4a^4}$

$(k=0,1,2,3)$

(这里用到了$a_k^4+a^4=0$)。$f(z)$在上半平面内只有2个极点a_0及a_1,于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}=-\pi i\frac{1}{4a^4}(ae^{\frac{\pi}{4}i}+ae^{\frac{3\pi}{4}i})$$

$$=-\pi i\frac{1}{4a^3}(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{-\frac{\pi i}{4}})=\frac{\pi}{2a^3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}.$$

1.3 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}\mathrm{d}x$ 类型积分

引理2(若尔当引理)设函数$g(z)$沿半圆周Γ_R:$z=Rei\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi,R$充分大)上连续,且$\lim_{R\to+\infty}g(z)=0$,在$\Gamma_R$上一致成立。则:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}g(z)e^{imz}\mathrm{d}z=0(m>0).$$

证理: 对于任给的$\varepsilon>0$,存在$R_0(\varepsilon)>0$,使当$R>R_0$时,有$|g(z)|<\varepsilon,z\in\Gamma_R$ 。

于是,就有

$$\left|\int_{\Gamma_R}g(z)e^{imz}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{\pi}g(Re^{i\theta})e^{imRe^{i\theta}}Re^{i\theta}i\mathrm{d}\theta\right|\le R\varepsilon\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\theta}\mathrm{d}\theta \quad (5)$$

这里利用了 $|g(Re^{i\theta})|<\varepsilon,|Re^{i\theta}i|=R$ 以及

$$\left|e^{imRe^{i\theta}}\right|=\left|e^{-mR\sin\theta+imR\cos\theta}\right|=e^{-mR\sin\theta}$$ 。

于是,由(若尔当不等式)

$$\frac{2\theta}{\pi}\le\sin\theta\le\theta(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}),$$

将(5)化为

$$\left|\int_{\Gamma_R}g(z)e^{imz}\mathrm{d}z\right|\le2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\le2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{-2mR\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta=2\varepsilon R\left[-\frac{e^{-\frac{2mR}{\pi}\theta}}{\frac{2mR}{\pi}}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi\varepsilon}{m}(1-e^{-mR})<\frac{\pi\varepsilon}{m}$$ 。

定理2:设 $g(z)\dfrac{P(z)}{Q(z)}$,其中 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 是互质多项式,且符合条件:

(1) $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 的次数高,

(2)在实轴上 $Q(z)\neq 0$

(3) $m>0$,

则有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{imx}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname{Re}s\left[g(z)e^{imz}\right]_{z=a_k}. \quad (6)$$

特别说来,将(6)分开实虚部,就可以得到形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}\cos mx\mathrm{d}x$ 及 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}\sin mx\mathrm{d}x$ 的积分,由数学分析相关知识,知上面两个反常积分都存在,其值就等于柯西主值。

例4:计算积分 $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\cos mx}{1+x^2}\mathrm{d}x(m>0)$。

解:被积函数为偶函数,故

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}\mathrm{d}x 。$$

根据定理1,则有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\pi i\operatorname{Re}s\left[\frac{e^{imz}}{1+z^2}\right]_{z=i}$$

$$=2\pi i\frac{e^{-m}}{2i}=\pi e^{-m} 。$$

则有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi e^{-m},$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-m} 。$$

总之,留数理论是复变函数论中一个非常重要的理论,只要我们在解决问题中灵活运用该理论可以达到事半功倍的效果,也有助于为定积分的计算提供新的思路,更好的解决实际问题中积分计算。

参考文献:

[1] 钟玉泉.复变函数论[M].3版.北京:高等教育出版社出版,2004.
[2] 胡作玄.近代数学史[M].济南:山东教育出版社,2006:286-293.
[3] 龚升.简明复分析[M].北京:北京大学出版社,2003:100-105.
[4] KLINE M.Mathematical Thought From Ancient to Modern Times [M].New York:Oxford University Press,1972
[5] 曲安京.中国数学史研究范式的转换[J].中国科学技术杂志,2005,26(1):50-58.
[6] 吉米多维奇.数学分析习题集[M].北京:高等教育出版社,2010.
[7] 李文林.数学史教程[M].北京:高等教育出版社,2000:258-262.
[8] KOLMOGOROV A N.YUSHKEVICH A P.Mathematics of the 19thCentury[M].Birkhauser Verlag,1996:119-270.
[9] GARRETT B A Source Book in Mathematicas1200-1800[M].Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press,1973:31-60.
[10] 郑建华.复分析[M].北京:清华大学出版社出版,2003.

(责任编辑:曲继鹏)