doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2017.04.005

可动边界多元函数系统最优控制的必要条件研究

吴群妹
(无锡科技职业学院理科教学部,江苏 无锡 214000)

摘要:根据可动边界二元函数泛函的极值定理,对可动边界多元函数泛函极值作进一步推广,从而给出可动边界多元函数系统最优控制的必要条件及其证明。

关键词:泛函变分;泛函极值;最优控制

中图分类号:O177.92; O232 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-1891(2017)04-0021-02

Study on the Requirements of Optimal Control Based on the Movable Boundary System

WU Qun-mei
(Department of Science Teaching, Wuxi Technology and Professional College, Wuxi, Jiangsu 214000, China)

Abstract: According to the functional extreme theorems of the movable boundary binary, this paper extends the functional extreme of movable boundary multifunction. A necessary condition for proof about movable boundary multifunction optimal control systems is given in this article.

Keywords: functional variation; functional extreme; optimal control

0 引言

变分法是求解泛函极值的一种经典方法[1],可以确定容许控制开集的最优控制函数,也是研究最优控制问题的一种重要工具。关于变分法在最优控制中的应用已做了大量研究[2-3]。文献[4]研究了变分法在最优控制问题中的一个应用,文献[5]讨论了最大值原理在求解无限时域最优控制问题中的一个应用,文献[6]给出了3类复杂系统在固定边界条件下最优控制的必要条件。在许多实际问题中,泛函的积分限既可以固定,也可以变动,而且变量往往不是局限于两个。因此,多元函数在可动边界条件下的泛函极值问题是目前需要解决的主要问题,本文在已有研究的基础上,给出了多元函数在可动边界条件下最优控制的必要条件,并且给出了证明。

1 变分法原理

引理1[7] 设有泛函$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$,其可取曲线$y=y(x)\in C^2$类函数,且两个端点$A(x_0,y_0)$,$B(x_1,y_1)$分别在两个给定的$C^2$类函数$y=\varphi(x)$与$y=\psi(x)$上移动,$\Delta J=F(x,y,y')\big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}(x,y,y')\delta y\big|_{x=x_1}+\varepsilon_1\delta x_1$,则$\delta y\big|_{x=x_1}=\delta y_1-y'(x_1)\delta x_1-\varepsilon\delta x_1$。

引理2[7] 设有泛函$J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx$,其极值曲线左端边界条件$y(x_0)=y_0$,$z(x_0)=z_0$,固定,另一端点$B(x,y,z)$在自由变动的条件下,其极值曲线$y=y(x)$在端点$x=x_1$处取得极值的必要条件是:

$$\begin{cases}(F-y'F_{y'}-z'F_{z'})\big|_{x=x_1}=0\\ F_{y'}\big|_{x=x_1}=0\\ F_{z'}\big|_{x=x_1}=0\end{cases}$$

2 可动边界多元函数系统最优控制

可动边界多元函数系统的状态方程一般形式可以写成:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f(y_i,u,x) \tag{1}$$

其中$y_i(x)$为状态变量,$u(x)$为控制输入,式中$yi\in C_2[x_0,x_1]$,$F\in C_2$,容许曲线$y=y_i(x)$在左端点$A(x_0,y_{i0})$固定,在右端点$B(x_1,y_{i1})$可变。

最优控制表达式为:

$$J[y_i(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_i,y_i')dx\ (i=1,2,\cdots n) \tag{2}$$

则该系统达到最优控制的必要条件为:

$$\begin{cases}\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i}\right)\Big|_{x=x_1}=0\\ F_{y'}\big|_{x=x_1}=0\end{cases} \tag{3}$$

收稿日期:2017-06-15
作者简介:吴群妹(1981—),女,硕士,讲师,研究方向:高等数学、应用数学、最优控制。

证明：该多元函数系统求最优控制问题实际上相当于引理2中泛函求极值问题，泛函$J[y_i(t)]$的增量可写成

$$\Delta J=\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}F(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\cdots,y_n+\delta y_n,y_1'+\delta y_1',y_2'+\delta y_2',\cdots,y_n'+\delta y_n')\mathrm{d}x-$$
$$\int F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$
$$=\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1}F(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\cdots,y_n+\delta y_n,y_1'+\delta y_1',y_2'+\delta y_2',\cdots,y_n'+\delta y_n')\mathrm{d}x+$$
$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\cdots,y_n+\delta y_n,y_1'+\delta y_1',y_2'+\delta y_2',\cdots,y_n'+\delta y_n')-$$
$$F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')]\mathrm{d}x \tag{4}$$

对式(4)右边第1个积分应用中值定理并考虑到F的连续性，同时在第2个积分中析出它的线性主部，有

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1}F(x,y_1+\delta y_1,\cdots,y_n+\delta y_n,y_1'+\delta y_1',y_2'+\delta y_2',\cdots,y_n'+\delta y_n')\mathrm{d}x$$
$$=F\big|_{x=x_1+\theta\delta x_1}\delta x_1$$
$$=F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n')\big|_{x=x_1}\delta x_1+\varepsilon_1\delta x_1 \tag{5}$$

式中，$0<\theta<1$，且当$\delta x_1\to 0$时，$\varepsilon_1\to 0$。

第2个积分的被积函数展成泰勒展开式，有

$$F(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\cdots,y_n+\delta y_n,y_1'+\delta y_1',y_2'+\delta y_2',\cdots,y_n'+\delta y_n')-$$
$$F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')$$
$$=F_{y_1}(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\delta y_1+F_{y_2}(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\delta y_2+$$
$$\cdots+F_{y_n}(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\delta y_n+F_{y_1'}(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\delta y_1' \tag{6}$$

式中，R_1为$\delta y_1,\delta y_2,\cdots,\delta y_n,\delta y_1',\delta y_2',\cdots,\delta y_n'$的高阶无穷小，可略去不计。

把式(6)代入式(4)中的第2个积分中，得

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\cdots,y_n+\delta y_n,y_1'+\delta y_1',y_2'+\delta y_2',\cdots,y_n+\delta y_n')-$$
$$F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')]\mathrm{d}x$$
$$\int_{x_0}^{x_1}(F_{y_1}\delta y_1+F_{y_2}\delta y_2+\cdots+F_{y_n}\delta y_n+F_{y_1'}\delta y_1'+F_{y_2'}\delta y_2'+\cdots+F_{y_n'}\delta y_n')\mathrm{d}x \tag{7}$$

将(7)的右边的n项分部积分，则(7)式变成

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\cdots,y_n+\delta y_n,y_1'+\delta y_1',y_2'+\delta y_2',\cdots,y_n'+\delta y_n')-$$
$$F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y'_n)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}[(F_{y_1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_1'})\delta y_1+(F_{y_2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_2'})\delta y_2+\cdots+(F_{y_n}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_n'})\delta y_n]\mathrm{d}x+$$
$$F_{y_1'}\delta y_1\Big|_{x_0}^{x_1}+F_{y_2'}\delta y_2\Big|_{x_0}^{x_1}+\cdots+F_{y_n'}\delta y_n\Big|_{x_0}^{x_1} \tag{8}$$

由于泛函J的极值曲线必须满足欧拉方程$\sum_{i=1}^{n}F_{y_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'}=0$，且在固定端点$A$处，$\delta y_1\big|_{x=x_0}=0$，$\delta y_2\big|_{x=x_0}=0$，$\cdots$，$\delta y_n\big|_{x=x_0}=0$。

故(8)式变成

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\cdots,y_n+\delta y_n,y_1'+\delta y_1',y_2'+\delta y_2',\cdots,y_n+\delta y_n')-$$
$$F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y'_n)]dx$$
$$=F_{y_1'}\delta y_1\big|_{x=x_1}+F_{y_2'}\big|_{x=x_2}+\cdots+F_{y_n'}\big|_{x=x_1} \tag{9}$$

将(4)和(5)式得：

$$\Delta J=F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y_1'}\delta y_1\big|_{x=x_1}+F_{y_2'}\delta y_2\big|_{x=x_1}+\cdots$$
$$+F_{y_n'}\delta y_n\big|_{x=x_1}+\varepsilon_1\delta x_1 \tag{10}$$

由引理1知：

$$\delta y_1\big|_{x=x_1}=\delta y_{11}-y_1'(x_1)\delta x_1-\varepsilon\delta x_1$$
$$\delta y_2\big|_{x=x_1}=\delta y_{21}-y_2'(x_1)\delta x_1-\varepsilon\delta x_1$$
$$\vdots$$
$$\delta y_n\big|_{x=x_1}=\delta y_{n1}-y_n'(x_1)\delta x_1-\varepsilon\delta x_1$$

式中，当$\delta x_1\to 0$时，$\varepsilon_1\to 0$。得到$\triangle J$关于δx_1与δy_{i1}的线性主部，得：

$$\delta J=F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y_i'}(x,y_i,y_i')\big|_{x=x_1}[\delta y_{i1}-y_i'(x_1)\delta x_1]$$
$$=(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'})\Big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y_i'}\big|_{x=x_1}\delta y_{i1} \tag{11}$$

故若δx_1与δy_{i1}相互无关，则由条件$\delta J=0$得：

$$\begin{cases}(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i})\Big|_{x=x_1}=0\\ F_{y_i'}\big|_{x=x_1}=0\end{cases} \tag{12}$$

证毕。

3 结语

复杂系统的最优控制问题一直是大家关注的问题，之前已经对固定边界条件下最优控制的必要条件做了相关研究[8]，本文进一步研究出了可动边界条件下多元函数系统最优控制的必要条件及其证明。但在许多实际问题中，最优控制系统往往还受一些约束条件的限制，关于可动边界多元函数在约束条件下最优控制的必要条件还没有相关的研究，希望今后能够解决此类问题。

参考文献：

[1] 朱肖伟.最优控制理论与应用中的若干问题[M].北京:科学出版社,2007.

[2] 梁秀娟,嵇海旭.用变分法实现现代控制系统中的最优控制[J].装备制造技术,2013(2):73-74.

[3] 吴群妹.基于多元函数约束条件的变分极值在最优控制中的应用[J].淮阴师范学院学报(自然科学版), 2015,14(3):193-196.

[4] 唐旭清,翁昊年.变分法在最优控制问题中的一个应用[J].江南大学(自然科学版),2003,2(5):521-524.

[5] 董丽华.最大值原理在求解无限时域最优控制问题中的应用[J].江汉大学学报(自然科学版), 2009,37(1):24-25.

[6] 吴群妹.固定边界条件下最优控制必要条件研究[J].江汉大学学报(自然科学版).2015, 43(5):410-413.

[7] 张莲,胡晓倩,王彬,等.现代控制理论[M].北京:清华大学出版社,2008.

[8] 吴群妹.可动边界高阶系统最优控制的必要条件研究[J].江汉大学学报(自然科学版),2016,44(5):402-406.