导数的应用研究*

徐建中

(亳州师范高等专科学校,安徽 亳州 236800)

【摘 要】导数是微积分中的一个重要概念,它建立在极限的基础上,本文运用了实际例题来说明导数在求极值问题、几何、实际问题和求极限中的运用。

【关键词】导数;极值;几何;函数

【中图分类号】O172.1 【文献标志码】A 【文章编号】1673-1891(2015)02-0028-02

DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.02.010

导数在数学学习和生活中有着十分广泛的运用,能够优化解决生活中的几何问题和实际问题,下面分类解析导数在各个方面的具体运用。

1 极值问题

定义:所谓极值,指最大、最小值,它要求极值定义里的不等式在整个定义域里统统成立,也可以说最值是整体极值,相对而言,前面讲的极值是局部极值,显然内部最值必为极值,反之未必,求最值时,有时为了省事,在求出可疑点之后,不判断极大、极小,可将所有可疑点的值都拿来比较,其中最大、最小者就是整体最大、最小值。

例1:求函数$f(x)=|x(x^2-1)|$的极值及$[-2,2]$上的最大、最小值。

解:

$$f(x)=\left[\operatorname{sgn}\left(x\left(x^2-1\right)\right)\right].\left(x\left(x^2-1\right)\right),$$

$$f'(x)=\left[\operatorname{sgn}\left(x\left(x^2-1\right)\right)\right].\left(3x^2-1\right)(x\neq 0,\pm 1)。$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left[\operatorname{sgn}\left(x\left(x^2-1\right)\right)\right]\Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{3}}.6x\Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{3}}=-2\sqrt{3}<0$$

故$f(x)$在$\frac{\sqrt{3}}{3}$处取极大值。因$f(x)$为偶数,在$-\frac{\sqrt{3}}{3}$处亦为极大值。

当$x=0,\pm 1$时,对于所有的x都有,$f(0\}=f(1)=f(-1)=0\leqslant f(x)$,故为最小值。$f(2)=f(-2)=6\geq f(x)(\forall x\in[-2,2])$,故$f(x)$在$[-2,2]$上最大值为6,最小值为0。

2 导数在几何中的运用

导数是微分学中的基础概念之一,利用导数知识可以更好的研究和讨论函数图像以及曲线的一些性质。

例2:设$f(x)$有连续二阶导数,已知曲线C:$y=f(x)$在点M(x,$f(x)$)处的曲率圆

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1)$$

跟曲线C在M点相切(圆心落于凹向的一侧),在M点该圆与曲线C有相等的一、二阶导数。试求a,b,R的表达式。

解:将y看成是(1)式所确定的x的函数,在(1)式两端同时对y求导,得

$$y'=\frac{a-x}{y-b} \quad (2)$$

(2)式再对x求导,得$1+y'^2+(y-b)y''=0$,

即 $y''=-\frac{1+y'^2}{y-b}=-\frac{(y-b)^2+(x-a)^2}{(y-b)^3}$ (3)

简记$Z=x-a,Y=y-b$,注意到上面y',y''是曲率圆的导数,它们应跟曲线c的导数f',f''相等。

$$\left.\begin{aligned}&\text{由(2)式得}\quad Z=-Yf'(x),\\&\text{由(3)式得}\quad \frac{Z^2+Y^2}{Y^3}=-f''(x)\end{aligned}\right\}\text{联立解出}Z,Y,$$

最后得 $a=x-\frac{f'\left(1+f'^2\right)}{f''},b=y+\frac{1+f'^2}{f''}$,

$$R^2=Z^2+Y^2=\frac{\left(1+f'^2\right)^3}{f''^2}。$$

3 导数的实际运用

在现实生活中,常常会用到导数的一些性质或定理来取得一些对笔者有帮助的数据,来更好的解决实际生活中的问题。

定理(第二判别法):若函数$f(x)$存在二阶导数,x_0是函数$f(x)$的稳定点,即

当$f'(x_0)=0$时,而$f''(x_0)\neq 0$,则:

当$f''(x_0)>0$时,x_0是函数$f(x)$的极小点;

当$f''(x_0)<0$时,x_0是函数$f(x)$的极大点。

例3:测量某个量A,由于仪器的精度和测量的技术等多方面的原因,对量A做了n次测量,测量的数值分别是$a_1,a_2,\cdots,a_n$。

收稿日期:2015-03-17

*基金项目:安徽省教育厅自然科学基金项目(项目编号:KJ2013B153,KJ2013Z258);数学教育安徽省特色专业(项目编号:20101184);亳州师专科研项目(项目编号:BZSZKYXM201302,2012yc02,2012yc13,2012yc24)专项资金资助。

作者简介:徐建中(1979-),男,安徽庐江人,讲师,硕士,主要从事数学教育和微分方程方面的研究。

现取x作为量A的近似值。问x取何值才能使x与$a_i(i=1,2,\cdots,n)$之差的平方和$\left(\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2\right)$为最小?

解:依题意,求函数

$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2, x\in R$的最小值。

$$f'(x)=2(x-a_1)+2(x-a_2)+\cdots+2(x-a_n)$$
$$=2[nx-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]$$

令$f'(x)=0$解得稳定点$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$。

则有$f''(x)=2n>0$。

根据定理,稳定点$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$是函数$f(x)$的极小点,因为函数$f(x)$是二次三项式

$$f(x)=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2),$$

且二次项的系数$n>0$,所以函数$f(x)$在极小点$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$的函数值就是函数$f(x)$在$R$的最小值,即$n$个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$的算数平均值作为量$A$的近似值才能使函数$f(x)$取最小值。这就是经常用算数平均值作为量$A$的值的理论依据。

4 导数在求极限中的运用

定义:若函数$y=f(x)$在其定义域中的一点x_0处极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称在x_0处可导,称此极限值为$f(x)$在x_0处的导数,记为$f'(x_0)$。显然,$f(x)$在x_0处的导数还有如下的等价定义形式:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}。$$

例4:设$f'(x)=k$,证明$\lim\limits_{\substack{a\to 0^-\\ b\to 0^+}}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$。

证明:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b}{b-a}\cdot\frac{f(b)-f(0)}{b}-\frac{a}{b-a}\cdot\frac{f(a)-f(0)}{a}$$

$$k=\frac{b}{b-a}\cdot k-\frac{a}{b-a}k。$$

两式相减

$$0\le\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-k\right|\le\left|\frac{b}{b-a}\right|\left|\frac{f(b)-f(0)}{b}-k\right|+\left|\frac{a}{b-a}\right|\left|\frac{f(a)-f(0)}{a}-k\right|。$$

因$a\to 0^-, b\to 0^+$,所以有$b>0>a,\left|\frac{a}{b-a}\right|\cdot\left|\frac{b}{b-a}\right|<1$。

又因$f'(0)=k$,故当$a\to 0^-, b\to 0^+$时右端极限为零,所以等式成立。

5 结束语

导数在平常的数学教学和平时的实际问题中有着广泛的运用,为解决一些数学实际问题中提供快捷简便的方法。

注释及参考文献:

[1]刘玉琏.数学分析[M](上册).北京:高等教育出版社,1994.

[2]刘玉琏.数学分析[M](下册).北京:高等教育出版社,1994.

[3]裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[R].北京:高等教育出版社,2006.

[4]刘崇丽.应用数学教程[M].北京:化学工业出版社,1998.

[5]史宁中.中学概率与微积分研究[M].北京:高等教育出版社,2010.

Application of Derivative

XU Jian-zhong

(Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800)

Abstract: The derivative is an important concept in calculus, which is built on the basis of the limit. The paper explains the derivative in the application of the extreme problem, geometry, the actual problem and limit by using actual examples.

Key words: derivative; extreme value; geometry; function