第29卷第2期　　西昌学院学报·自然科学版　　Vol.29,NO.2
2015年6月　　Journal of Xichang College·Natural Science Edition　　Jun.,2015

不等式的几种证明方法*

鲁翠仙
（临沧师范高等专科学校 数理系,云南 临沧 677099）

【摘　要】利用分块矩阵和初等变换的性质给出了3种证明Sylvester不等式的方法,并得到了Sylvester不等式的本质及其等号成立的充要条件。

【关键词】Sylvester不等式;证明;初等变换;分块矩阵
【中图分类号】O178　【文献标志码】A　【文章编号】1673-1891(2015)02-0026-02
DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.02.009

1 预备知识

结论1 设A是$s\times n$矩阵,B是$l\times m$矩阵,则$rank\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=rank(A)+rank(B)$。

结论2 设A是$s\times n$矩阵,B是$l\times m$矩阵,C是$s\times m$矩阵,则$rank\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}\geqslant rank(A)+rank(B)$。

结论3 设A是$s\times n$矩阵,B是$n\times m$矩阵,如果$AB=0$,那么$rank(A)+rank(B)<n$。

结论4 如果$m\times n$矩阵A的秩为r,那么它的任何S行组成的子矩阵A_1的秩大于或等于$r+s-m$。

2 证明方法

设A、B分别是$s\times n$、$n\times m$矩阵,则$rank(AB)\geq rank(A)+rank(B)-n$。

证法一　只要证$n+rank(AB)\geq rank(A)+rank(B)$。

据结论1,有

$$n+rank(AB)=rank\begin{pmatrix}I_r&0\\0&AB\end{pmatrix}。$$

作分块矩阵的初等行(列)变换:

$$\begin{pmatrix}I_n&0\\0&AB\end{pmatrix}$$

根据分块矩阵的初等行(列)变换不改变矩阵的秩,以及结论2,得

$$rank\begin{pmatrix}I_n&0\\0&AB\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}B&I_n\\0&A\end{pmatrix}\geq rank(B)+rank(A).$$

因此$rank(AB)\geq rank(A)+rank(B)-n$.

证法二　若$A=0$或$B=0$,则由结论3立即看出命题为真。下面设$A\neq0$且$B\neq0$。

设B的列向量组为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$。则

$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_m)$。

设AB的列向量组$A\beta_1$,$A\beta_2$,…,$A\beta_m$的一个极大线性无关组为$A\beta_{i_1}$,$A\beta_{i_2}$,…,$A\beta_{i_t}$,其中$t=rank(AB)$。则

$$A\beta_j=b_1A\beta_{i_1}+b_2A\beta_{i_2}+\cdots+b_tA\beta_{i_t}=A(b_1\beta_{i_1}+b_2\beta_{i_2}+\cdots+b_t\beta_{i_t})$$

从而$A[\beta_j-(b_1\beta_{i_1}+\cdots+b_t\beta_{i_t})]=0$, $j=1,2,\cdots,m$。

设齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\beta_{n-r}$,其中$r=rank(A)$。则对于$j=1,2,\cdots,m$,有

$$\beta_j-(b_1\beta_{i_1}+\cdots+b_t\beta_{i_t})=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-r}。$$

由此得出,向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$可以由向量组$\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_t},\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$线性表出,因此

$$rank\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}\leq rank\{\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_t},\eta_1,\cdots\eta_{n-r}\}\leq t+n-r.$$

即$rank(B)\leq rank(AB)+n-rank(A)$.

证法三　设$rank(A)=r$。把经过初等行变换化成简化行阶梯型矩阵G,再G把经过初等列变换可以化成形如下述的矩阵:

$$\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

因此存在初等矩阵$P_1,P_2,\cdots,P_t,Q_1,Q_2,\cdots,Q_u$,使得

$$P_t\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_u=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

从而存在可逆矩阵P,Q,使得

$$A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q.$$

于是

$$AB=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}QB.$$

令

$$QB=\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\}r行\\\}n-r行\end{matrix}$$

则$AB=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}H_1\\0\end{pmatrix}$

从而$rank(AB)=rank\begin{pmatrix}H_1\\0\end{pmatrix}=rankH_1$

收稿日期:2015-04-02
*基金项目:2013年临沧师范高等专科学校科研课题(项目编号:LCSZL2013008)。
作者简介:鲁翠仙(1980-),女,彝族,云南凤庆人,副教授,硕士,主要从事代数、计算方法方面的研究。

由于 $rank(B)=rank(QB)=rank\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}$。

据结论4的结果,得

$rank(H_1)\geq rank(B)+r-n$

因此 $rank(AB)\geq rank(B)+rank(A)-n$

3 Sylvester 不等式等号成立的一个充要条件

定理　设 $A\in K^{s\times n}, B\in K^{n\times m}$ $rank(A)=r$ 可逆矩阵 $P\in K^{s\times s}$ 与 $Q\in K^{n\times n}$ 得

$P^{-1}AQ=\begin{bmatrix}E_r & O\\O & O\end{bmatrix}$,则 Sylvester 不等式等号成立即 $rank(AB)\geq rank(A)+rank(B)-n$ 的充要条件是 $rank[Q' \quad B]=rankB$

其中 Q' 是由 Q 的后 $n-r$ 列组成的矩阵。

证明:只证明 $0<r<n$ 的情形即可。

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 K^m 的标准基, $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 K^n 的标准基。显然, Sylvester 不等式等号成立当且仅当 $N(A)\subseteq R(B)$, 而 $Q\varepsilon_{r+1}',Q\varepsilon_{r+2}',\cdots,Q\varepsilon_n'$ 是 $N(A)$ 的一组基, $B\varepsilon_1,B\varepsilon_2,\cdots,B\varepsilon_m$ 是 $R(B)$ 的一组基,所以 $N(A)\subseteq R(B)$ 当且仅当 $Q\varepsilon_{r+1}',Q\varepsilon_{r+2}',\cdots,Q\varepsilon_n'$ 可由 $B\varepsilon_1,B\varepsilon_2,\cdots,B\varepsilon_m$ 线性表出,记 $Q'=[Q\varepsilon_{r+1}',Q\varepsilon_{r+2}',\cdots,Q\varepsilon_n']$,则 Sylvester 不等式等号成立当且仅当 $[Q' \quad B]$ 与 B 有相同秩, $rank[Q' \quad B]=rankB$ 。

例 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&1\\2&2\\2&1\end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix}0&0\\2&2\\2&2\end{bmatrix}$ 则 $rankAB=1$,因为

$$\begin{bmatrix}A\\E_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\1&1&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{对}A\text{作行变换,对}\left[\begin{smallmatrix}A\\E_3\end{smallmatrix}\right]\text{作列变换}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

故 $rankA=2$, $Q=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $Q'=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$,然后

$$[Q' \quad B]=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&2\\1&2&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

则 $rank[Q' \quad B]=rankB=2$,从而 $rank(AB)=rank(A)+rank(B)-3=1$。

同时根据上面的讨论可得到 Sylvester 不等式的本质: 两矩阵乘积的秩不大于前一矩阵行空间与后一矩阵列空间的交空间的维数,而此维数又不超过两矩阵秩的和减去欧氏空间 R^n 的维数。

注释及参考文献:

[1]丘维声.高等代数(第二版)[M].北京:高等教育出版社,2001.

[2]北京大学数学系.高等代数[M].北京:高等教育出版社, 1988.

[3]张枚.高等代数习题选编[M].杭州: 浙江科学技术出版社,1985.

[4]黄卫红,杨兴东,周月军.矩阵Sylvester 不等式与Frobenius 不等式等号成立的条件[J].南京气象学院学报,2007,30(2): 279-283.

Several Methods to the Evidence of Sylvester Inequality

LU Cui-xian

(Department of Mathematical, Lincang Teachers College, Lincang, Yunnan 677099)

Abstract: In this paper ,by using the properties of elementary transformation and partitioned matrices we give three method to prove Sylvester inequality and we explore the nature of the Sylvester inequality and the necessary and sufficient conditions when equals established.

Key words: Sylvester inequality; proof ;elementary transformation; partitioned matrices