用柯西收敛原理证明实数完备性的其它定理*

张学茂，刘来山，陈　玲，梁　妮，刘　晶，徐　芳
（泰州学院 数理学院，江苏 泰州 225300）

【摘　要】遵循学生学习数学分析的知识顺序，从证明柯西收敛原理出发，对实数完备性其它定理进行一一证明，验证与推广了有关学者的论证。

【关键词】完备性；收敛；极限；确界
【中图分类号】O171　【文献标志码】A　【文章编号】1673-1891（2015）02-0023-03
DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.02.008

引言

实数完备性基本定理是实数理论中的重要内容之一。实数完备性的基本定理有：数列的柯西收敛原理、实数集的确界定理、区间套定理、有限覆盖定理、数列的单调有界定理、聚点定理、致密性。这七个定理是彼此等价的，它们以不同的方式刻画了实数集R的一种特征—完备性。大多数教材[1,2]都是把确界定理作为公理，但确界定理的证明冗长，不易被学生所理解和接受。诸多学者以某一定理当为公理，对实数完备性的几大定理进行循环论证[3-6]，也有学者利用戴得金提出的完全覆盖法对实数完备性基本定理进行了统一处理[7]。这些论述堪称为经典之作。本课题组研究发现，用实数完备性彼此等价的七个定理中的一个定理去证明其它定理，在诸多文献资料中鲜有发现。而柯西收敛原理是数学分析中的重要定理之一，它为研究数列和函数极限提供了有效的思路与方法，并在判别广义积分、级数是否收敛、函数的一致连续等方面都有较广泛的应用。本文试遵循学生学习数学分析的知识顺序，从证明柯西收敛原理出发，去一一证明实数完备性的其它定理。

1　预备知识

（柯西收敛原理）[2]数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\in N^+$，当$\forall n,m>N$时总有$|a_n-a_m|<\varepsilon$成立。

证明：(必要性)设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由数列极限的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\in N^+$，$\forall n,m>N$时有$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}$。因而有$|a_n-a_m|<|a_n-A|+|a_m-A|<\varepsilon$。

(充分性)由条件$\forall\varepsilon>0$，$\exists\in N^+$，当$\forall n,m>N$时有$|a_n-a_m|<\varepsilon$。则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N^+$，当$n>N_1$时，$|a_n-a_{N_1}|<\varepsilon$总是成立的。取两者的中点设为A，假若满足条件的数列$\{a_n\}$发散，则$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N_2\in N^+$，当$n>N_2$时，对于$\forall B\in R$总有$|a_n-B|>\varepsilon_0$。由实数B的任意性可知，当$N_2>N_1$时，$|a_n-A+A-a_{N_1}|=2|a_n-a_{N_1}|>2\varepsilon_0$这与已知条件矛盾。故数列$\{a_n\}$收敛。

定义1[2]设S为数轴上的点集，ξ为定点(它可属于S，也可不属于S)，若ξ的任何邻域内都含有S的无穷多个点，则称ξ为的点集S一个聚点。

定义1′[2]设S为实数集R上的非空点集，$\forall\varepsilon>0$，$U^o(\xi;\varepsilon)\cap S\neq\phi$总成立，则称$\xi$为的数集$S$一个聚点。

定义1″[2]对于点集S中若存在各项互异的收敛数列$\{x_n\}$，则其极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$称为$S$的一个聚点。

定义2[2]设闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$具有如下性质：(i)$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,\dots$；(ii)$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则称$\{[a_n,b_n]\}$为闭区间套，简称区间套。

定义3[2]设S是R中的一个数集。若数$\eta\in S$满足：(i)对一切$x\in S$，都有$x\le\eta$，即η是S的上界；(ii)对任何$\alpha<\eta$，$\exists x_o\in S$，使得$x_o>\alpha$即η又是S的最小上界，则称数η为数集S的上确界，记作$\eta=\sup S$。同样可定义下确界。

定义4[2]设S为数轴上的点集，$H=\{(\alpha,\beta)\}\subset S$。若$S$中任何一点都含在$H$中至少一个开区间内，则称$H$为$S$的一个开覆盖，或称$H$覆盖$S$。若$H$中开区间的个数是无限(有限)的，则称$H$为$S$的一个无限开覆盖(有限开覆盖)。

2　主要结论

2.1 利用柯西收敛原理证明确界定理

确界定理[2]设S为非空数集。若S有上界，则S必有上确界；若S有下界，则S必有下确界。

证明：设S为非空有下界数集，由实数的阿基米德性，$\forall\alpha>0,\exists k_\alpha\in Z$，使$\lambda_\alpha=k_\alpha\alpha$为$S$的下界，但$\lambda_\alpha+\alpha=(k_\alpha+1)\alpha$不是$S$的下界。那么$\exists\alpha'\in S$使$\alpha'<(k_\alpha+1)\alpha$，分别取$\alpha=\frac{1}{n},n=1,2,3\cdots$则对于每个$n$存在相应的$\lambda_n$，$\lambda_n$为$S$的下界，而$\lambda_n+\frac{1}{n}$不是$S$的下界。故$\exists\alpha'\in S$使$\alpha'<\lambda_n+\frac{1}{n}$。

收稿日期：2015-03-15
*基金项目：江苏省大学生实践创新训练项目研究成果之一（项目编号：201412917003Y）。
作者简介：张学茂（1970-），男，江苏姜堰人，副教授，硕士，研究方向：基础数学。

对于$m\in Z^+$，λ_m为S的下界，则$\lambda_m\le\alpha'$。则$\lambda_m-\lambda_n<\frac{1}{n}$，同理$\lambda_n-\lambda_m<\frac{1}{m}$，从而$|\lambda_m-\lambda_n|<\max\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\}$，所以$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当$n,m>N$时有$|\lambda_n-\lambda_m|<\varepsilon$。由柯西收敛准则知数列$\{a_n\}$收敛，不妨令$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$，$\forall a\in S$，总有$a\ge\lambda_n$

则$a>\lambda$，$\forall\delta>0,\frac{1}{n}\to0,n\to\infty$，$n$充分时，同时有$\frac{1}{n}<\frac{\delta}{2}$，$\lambda_n<\lambda+\frac{\delta}{2}$。又因为$\lambda_n+\frac{1}{n}$不是$S$的下界，故$\exists\alpha'\in S$使$\alpha'<\lambda_n+\frac{1}{n}$，$\alpha'<\lambda_n+\frac{1}{n}<\lambda+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\lambda+\delta$，由定义3可知，$\lambda$为$S$的下确界。

同理可证数集S有上界必有上确界。

2.2 利用柯西收敛原理证明闭区间套定理

区间套定理[2] 若$\{[a_n,b_n]\}$是一闭区间套，则存在唯一的一点ξ，使得$\xi\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\ldots$，即$a_n\le\xi\le b_n,n=1,2,\ldots$。

证明：由定义2可知：闭区间$\{[a_n,b_n]\}$显然满足① $\forall n\in N$，$a_n\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b_n$，$n=1,2,\ldots$ 即$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,\ldots$ ② $m>n$，$0\le\lim\limits_{n\to\infty}a_m-a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n-a_n=0$。则数列满足柯西收敛准则，即$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim(b_n-a_n+a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，又因$\{a_n\}$单调增加，$\{b_n\}$也单调增加，则$a_n\le\xi\le b_n,n=1,2,\ldots$。

下证满足条件$a_n\le\xi\le b_n,n=1,2,\ldots$的$\xi$是唯一的公共点。

假设数ξ'也满足$a_n\le\xi'\le b_n$，$n=1,2,\ldots$则由$a_n\le\xi\le b_n,n=1,2,\ldots$有$|\xi-\xi'|\le(b_n-a_n)$，$n=1,2,\ldots$。$0=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)\ge|\xi-\xi'|$，故有$\xi'=\xi$。

2.3 利用柯西收敛原理证明有限覆盖定理

有限覆盖定理[2] 设H为闭区间$[a,b]$的一个（无限）开覆盖，则从H中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$。

证明 假设定理的结论不成立，即闭区间$[a,b]$不能被H中有限个开区间覆盖。现采用常见的二分法，将$[a,b]$等分为两个子区间，则两个子区间中至少有一个子区间不能被H中有限个开区间覆盖。记这个区间为$[a_1,a_2]$，且$a_2-a_1=\frac{b-a}{2}$，再将$[a_1,a_2]$等分为两个子区间，同样，其中至少有一个子区间不能被H中有限个开区间覆盖，记为$[a_3,a_4]$，$a_4-a_3=\frac{1}{4}(b-a)$。按此等分区间的方法无限地进行下去，得到一个数列$\{a_n\}$，它满足$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$，由柯西收敛原理可知数列$\{a_n\}$收敛，不妨令：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$。即$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，$|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$，即$[a_n,a_{n+1}]\subset\cup(\xi,\varepsilon)$，当$n$充分大时，存在开区间$(\alpha,\beta)\in H$ 使得$[a_{n+1},a_n]\subset(\alpha,\beta)$。这表明$[a_n,b_n]$只须用$H$中的一个开区间$(\alpha,\beta)$就能覆盖，与假设相矛盾。因此假设不成立。

2.4 利用柯西收敛原理证明单调有界定理

单调有界定理[2] 在实数系中，有界的单调数列必有极限。

证明：假设数列是单调递减数列，假设数列不收敛。由柯西收敛原理可知：总存在$\varepsilon_0>0$，任意正整数N，当$m,n>N$时，$a_m-a_n>\varepsilon_0$或$a_m-a_n<-\varepsilon_0$不妨取$\varepsilon_0=1$，取数列$\{a_n\}$的两子列$\{a_{m_i}\}$，$\{a_{n_i}\}$，$N<m_i<n_i$且$a_{m_{i+1}}<a_{n_{i+1}}<a_{m_i}<a_{n_i}$，那么$\sum\limits_{i=1}^{k}(a_{m_i}-a_{n_i})\le-k$

$$a_{m_k}-a_{n_k}+a_{m_{k-1}}-a_{n_{k-1}}\cdots+a_{m_1}-a_{n_1}$$
$$=a_{m_k}-[(a_{n_k}-a_{m_{k-1}})+(a_{n_{k-1}}-a_{m_{k-2}})\cdots+(a_{n_2}-a_{m_1})+a_{n_1}]<-k,$$

则有$a_{m_k}<-k$由k的任意性可知，a_{m_k}无下界。这与已知数列有界矛盾。故数列必收敛。

2.5 利用柯西收敛原理证明聚点定理

聚点定理[2] 实数轴上的任意有界无限点集必有聚点。

证明：假设有界无限点集E中没有聚点。不妨令m,M分别是E的下界和上界，则在$[m,M]$中每一点都不是E的聚点。取$[m,M]$的中点x_1，在$[m,x_1][x_1,M]$中至少有一个区间有无穷多个点。不妨令$[m,x_1]$中有无穷多个点，再取$[m,x_1]$的中点x_2，$|x_1-x_2|=\frac{1}{4}(M-m)$同样$[m,x_2][x_1,x_2]$中至少有一个区间有无穷多个点。以此方法一直取下去，到$[x_n,x_{n+1}]$时$|x_n-x_{n+1}|=\frac{1}{2^{n+1}}|M-m|$，$[x_n,x_{n+1}]$中仍有无穷多个点。任取其中属于E中的两点$x'_n,x'_{n+1}$则$|x'_n-x'_{n+1}|<\frac{1}{2^{n+1}}|M-m|\to0(n\to\infty)$。由柯西收敛原理可知数列$\{x'_n\}$收敛。由定义1″知无限有界点集中至少有一个聚点。

2.6 利用柯西收敛原理证明致密性

致密性定理[2] 有界数列必有收敛子列。

证明：设$\{a_n\}$为有界数列。若$\{a_n\}$是常数数列，常数列显然收敛。

若$\{a_n\}$中有无限项不相等，假设任一子列都发散，则总存在$\varepsilon_0>0$，不妨取$\varepsilon_0=1$任意正整数N，不妨取$N=1$，当$m,n>N$时，$|a_m-a_n|>\varepsilon_0$。任取一个单增子列$\{a_{n_i}\}$总有$a_{n_{k+1}}-a_{n_k}>1$，$n_k>1$，$k=1,2,3\cdots$，$\sum\limits_{k=1}^{m}(a_{n_{k+1}}-a_{n_k})\ge m$，即$a_{n_m}>m-a_{n_1}$，而$a_{n_1}$有界，由$m$的任意性可知$a_{n_m}$无上界，这与题设中的有界数列相矛盾，故假设不成立。

实数的基本完备性定理中，柯西收敛原理、聚点定理、确界定理、单调有界定理、闭区间套定理都是刻画实数系统的局部性质；致密性定理、有限覆盖定理是刻画实数系的整体性质。这些定理通过整体性质归结到某点邻域的“局部性质”，或由某局部性质推广到整体性质，形成了对实数系的全方位刻画。柯西收敛原理尤其重要，它既可证明极限点的存在性，又可找到相应的点。只有理清了这些定理的内涵，才能加深学生对定理的理解，拓宽证明思路，提高学生的逻辑思维能力与数学分析能力。

注释及参考文献：

[1]刘玉链、傅沛仁等.数学分析讲义(第五版)[M].北京：高等教育出版社，2008(1)：89−95.
[2]华东师范大学数学系.数学分析第三版[M].北京：高等教育出版社，2013(4)：7−15、161−167.
[3]田菊蓉.实数系完备性定理的等价性[J].西安联合大学学报，1999(4)：49−53.
[4]庄陵等.实数系完备性基本定理的循环证明[J].重庆工商大学学报(自科版)，2006(6)：219−223.
[5]李湘云.有关实数完备性基本定理的循环证明[J].湖北财经高等专科学校学报，2002(8)：57−60.
[6]徐新荣.利用实数空间基本定理证明问题的几点注释[J].西昌学院学报(自科版)，2012(3)：60−62.
[7]盖盈.关于实数完备性基本定理的统一处理方法[J].天津师范大学学报(自科版)，1999(12)：23−28.

Prove Other Real Number Completeness Theorem Use Cauchy Convergence Principle

ZHANG Xue−mao，LIU Lai−Shan，CHEN Ling，LIANG Ni，LIU Jing，XU Fang
(Institute of Mathematics，Taizhou University，Taizhou, Jiangsu 225300)

Abstract: According to the knowledgeorder of mathematical analysis learning and starting from the proof of the Cauchy Convergence Principle, we prove the other theorems on completeness of the set of real numbers, which generalizes some related results given by some other scholars.

Key words: completeness；convergence；limit；world indeed

（上接第22页）

height, leaf fresh weight, root fresh weight, leaf dry weight, root dry weight, leaf moisture content, moisture content root, root to shoot ratio, germination rate etc. It also explored the correlation between different NaCl solution concentration and the each trait of maize germination.The results showed that the trait differences of the different hybrid combinations reached the level of 0.05 or 0.01 except the leaf moisture content and root moisture content at germination stage. As a result , these indexes can be used as indicators of the salt tolerance maize about screening, identification . NaCl concentration was significantly correlated with each trait, excluding root shoot ratio Increases with increasing of NaCl concentration, the other indicators decreased with the increasing of NaCl concentration.

Key words: Maize; germination stage; salt stress