

# 《庖丁解牛》对用L'Hospital法则求极限的启示\*

徐 敏

(四川幼儿师范高等专科学校,四川 江油 621709)

**【摘 要】**在高等数学和数学分析中,极限的计算非常重要,求解的方法多种多样,L'Hospital法则就是其中的重要方法之一.文章结合儒家经典《庄子》中《庖丁解牛》一段,较为全面地阐述了如何运用L'Hospital法则求极限,以及运用时应当注意的问题,并通过例题对易出现的问题加以说明.

**【关键词】**函数极限;L'Hospital法则;高等数学;庖丁解牛

**【中图分类号】**O171 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2014)03-0023-02

应用L'Hospital法则求极限是高等数学和数学分析中求解极限的一种重要方法,主要应用于未定型( $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)求极限.

L'Hospital法则通常以下面两个定理的形式呈现<sup>[1]</sup>:

定理1.设函数 $\Phi(x)$ 、 $F(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内满足下列条件:

- (1)有定义,且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = 0$ ;
- (2)可导,且 $F'(x) \neq 0$ ;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = A$  (可实数 $+\infty$ 、 $-\infty$ 、或 $\infty$ ),

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = A .$$

定理2.设函数 $\Phi(x)$ 、 $F(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内满足下列条件:

- (1)有定义,且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = \infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \infty$  ;
- (2)可导,且 $F'(x) \neq 0$  ;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = A$  (  $A$  可为实数 $+\infty$ 、 $-\infty$ 、或 $\infty$  ),

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = A .$$

以上定理在 $x \rightarrow x_0^+$ ,  $x \rightarrow x_0^-$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ 时仍然成立<sup>[2]</sup>.

《庖丁解牛》<sup>[3]</sup>是《庄子·内篇·养生主第三》的第二部分,如果将满足上述定理条件的未定型( $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)求极限问题看作是“牛”的话,那么L'Hospital法则就是庖丁手中的“刀”,下面谈几点《庖丁解牛》对用L'Hospital法则求极限的启示.

## 1 庖丁的“刀”是“解牛”利器,不能用来对付“非牛”、“假牛”

庖丁的“刀”(L'Hospital法则)虽然是一把利

器,但对象必须得是“牛”(满足上述定理条件的未定型( $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)求极限问题),因此,求 $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ 的极限时,首先应看其是否满足L'Hospital法则的条件,如不满足(“非牛”、“假牛”),就不能使用L'Hospital法则求解:

- (1)不是未定型( $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)求极限不能用L'Hospital法则;
- (2)是未定型( $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)求极限,但不满足上述定理条件的不能用L'Hospital法则.

例1.求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

错误解法  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sin x}{\sin x} = -1.$

错误原因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ 不是未定型( $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)求极限,所以不能用L'Hospital法则求解.

正确解法  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = 1.$

例2.求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$

错误解法  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ , 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ 不

存在,所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 不存在.

错误原因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 虽然是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,但是不满足定理2的第(3)个条件,因此不能运用L'Hospital法则求解.

正确解法  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1} = 1.$

由上面两例还可以看出:“满足L'Hospital法则的条件”是“ $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ 有极限”的充分条件,而非必要条件,就是说“用L'Hospital法则算不出结果,不等于极限不存在”.

收稿日期:2014-04-22

作者简介:徐敏(1978-),男,四川江油人,本科,讲师,研究方向:数学教育。

### 2 要“目无全牛”,不能被“伪装”所蒙蔽

未定型求极限问题中还有 $0 \cdot \infty$ 型、 $\infty - \infty$ 型、 $0^0$ 型、 $1^\infty$ 型、 $\infty^0$ 型等多种,这些极限问题看似“非牛”(不是未定型 $[\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型]求极限),但往往只要“剥去”其“伪装”(通过“代数变形”等手段),就会发现它们的本质仍然是“牛”(未定型 $[\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型]求极限),庖丁的“刀”(L'Hospital法则)还是对付它们的利器。

例 3. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x (n > 0)$

单从“外形”上看(是 $0 \cdot \infty$ 型未定型求极限),这不是“牛”(不是未定型 $[\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型]求极限),但我们注意到 $x^n \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}$ ,所以,这本质上还是一头“牛”(  $\frac{\infty}{\infty}$ 型求极限),并且满足 L'Hospital 法则的条件,因而,可以应用定理 2 解答如下:

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\frac{x^n}{n}) = 0$$

例 4. 求  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

解 这是 $\infty - \infty$ 型未定型求极限,但  $\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ ,因此原式可化为 $\frac{0}{0}$ 型未定型求极限,应用 L'Hospital 法则(定理 1)解答如下:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

例 5. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x$

解 这是 $\infty^0$ 型不定型求极限,但 $(1 + \frac{1}{x})^x = e^{\ln(1 + \frac{1}{x})^x} = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$ ,由复合函数连续性和极限求法可知:原极限问题的关键是求 $x \ln(1 + \frac{1}{x})$ 的极限( $0 \cdot \infty$ 型)。而

$x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$  ( $\frac{\infty}{\infty}$ 型),可用 L'Hospital 法则

求其极限,解答如下:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(1 + \frac{1}{x})^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(1 + \frac{1}{x})]} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

### 3 “游刃有余”不是一日之功,仗着“利器”胡乱“解牛”不可取

庖丁说“始臣之解牛之时,所见无非牛者。三年之后,未尝见全牛也。”同样,只有对 L'Hospital 法则的条件、结论进行全面了解、掌握,并在学习的过程中勤加练习,才能熟练灵活地运用该法则求解函数极限。当然,也不能因为掌握了 L'Hospital 法则就对函数极限问题(特别是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定型函数极限)不加重重视、大而化之,而应当对比定理条件,仔细求解(特别是对 $0 \cdot \infty$ 型、 $\infty - \infty$ 型等需要进行“技术处理”的极限问题),正如庖丁所说“虽然,每至于族,吾见其难为,怵然为戒……”

L'Hospital 法则解决了分子、分母均可导的形如 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型(其他如 $0 \cdot \infty$ 型、 $\infty - \infty$ 型、 $0^0$ 型、 $1^\infty$ 型、 $\infty^0$ 型等可通过适当变换转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)未定型求极限的问题,计算多元函数极限时,也可尝试使用多元函数的 L'Hospital 法则<sup>[4]</sup>,但对于某些类型(包括常见类型)的数列极限或是非可导函数的极限计算问题,应用上述法则就行不通,或者显得比较繁琐,这时可以尝试 Stolz 定理(包括它的推论和推广形式)<sup>[5]</sup>,在此不再赘述。

#### 注释及参考文献:

[1]清华大学应用数学系.高等数学[M].第2版.北京:高等教育出版社,2001.  
 [2]华东师范大学数学系.数学分析[M].第2版.北京:高等教育出版社,1995.  
 [3]庄周,庄子[M].方勇,译注.1版.上海:中华书局,2010.  
 [4]万俊,王庆平.洛比达法则的推广[J].四川师范大学学报:自然科学版,1994(12):384-388.  
 [5]裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].2版.北京:高等教育出版社,2006.

## Paodingjieniu's Inspiration for the Ultimate with L'Hospital Principle

XU Min

(Sichuan Preschool Teachers College, Jiangyou, Sichuan 621709)

Abstract: In the mathematics and analysis of the higher mathematics, limit calculation is very important, for a

(下转 27 页)

## Boundary Control of a First-order Hyperbolic PDE

GUO Chun-li, HU Rong

(School of Mathematics and Finance, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou, Sichuan 635000)

**Abstract:** This paper considers stabilization of a first-order hyperbolic PDE by using backstepping method of boundary control. For designing the controller, a modificative backstepping transformation is introduced. Through a series of mathematical computation, the exact solutions of kernels are obtained, and a control law is obtained specifically. Finally, for obtaining stabilization of the closed-loop system, the inverse information is found.

**Key words:** a First-order Hyperbolic PDE; boundary control; backstepping method; stabilization

(上接3页)

## An Evaluation on Land Utilization Ecological Carrying Capacity Based on the Ecological Footprint Model

—Taking Xichang College as an Example

LI Li-na<sup>1</sup>, LIU Yun-wei<sup>1</sup>, WU Jian-yong<sup>2</sup>

(1. School of Agricultural Sciences, Xichang College, Xichang, Sichuan 615013;

2. Yi long Land Res Duraces Bureau of Nan chong, Yilong, Sichuan 637600)

**Abstract:** Based on the ecological footprint mode, the authors calculated and analyzed the land utilization ecological carrying capacity on Xichang city of Sichuan Province. The results showed that the per capita ecological footprint of Xichang City was 0.695541, which dropped to 0.610628 after deducting 12% biodiversity, and the per capita ecological deficit was 0.08491. The utilization level of resources per capita of Xichang City was much lower than that of China. From the composition of ecological footprint, the ecological footprint of different land use types from big to small order, followed by arable land, fossil energy land, water area, construction land, grassland and woodland. At present, the development mode of Xichang city was mainly to consume natural resource stock.

**Key words:** ecological footprint; ecological carrying capacity; Xichang city; ecological environment

(上接24页)

variety of methods. L'Hospital principle is one of the important methods. Based on the confucian classics section Paodingjieniu of Chuang-tzu, the paper expounds in detail how to utilize L'Hospital principle for limit and the problems that should be paid attention to when using it, and the problems explained by the example.

**Key words:** limit of function; L'Hospital principle; higher mathematics; Paodingjieniu