Γ函数与B函数的性质及其应用

周晓晖
(江苏联合职业技术学院 连云港财经分院,江苏 连云港 222003)

【摘 要】Γ函数与B函数是含参变量积分,它们统称为欧拉积分,在数学分析和概率统计中有着广泛的应用。本文系统论述了Γ函数与B函数的概念、性质、关系并给出了详细的证明,进而揭示出解决问题的关系和规律。

【关键词】Γ函数;B函数;含参变量积分;连续;收敛;发散
【中图分类号】O172.2 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)03-0016-04

预备知识

定理1(柯西判法Ⅰ)设 f 是在任何有限区间 $[a,A]$ 上可积的正值函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$

(ⅰ)若 $p>1$, $0\le\lambda\le+\infty$,则 $\int_a^{+\infty} f$ 收敛;

(ⅱ)若 $p\le1$, $0\le\lambda\le+\infty$,则 $\int_a^{+\infty} f$ 发散。

(柯西判法Ⅱ)设正值函数 f 在 $(a,b]$ 的任何内闭区间上都可积,且 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda$

(ⅰ)若 $0<p<1$, $0\le\lambda<+\infty$,则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ⅱ)若 $p\ge1$, $0\le\lambda<+\infty$,则瑕积分 $\int_a^b f$ 发散。

定理2设 f 为 $[a,b]\times[c,+\infty]$ 上的连续函数,含有参变量非正常积分 $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

定理3设 f 和 f_x 均为 $[a,b]\times[c,+\infty]$ 上的连续函数,若 $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上收敛,$\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,且

$I'(x)=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy$ 。

定理4设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty]\times[c,+\infty]$ 上连续,若

(1) $\int_c^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在任何闭区间 $[c,d]$ 上一致收敛,$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 关于 x 在任何闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛。

(2)设 $\int_a^{+\infty}dx\int_c^{+\infty}|f(x,y)|dy$ 与 $\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}|f(x,y)|dx$ 中有一个收敛,则 $\int_a^{+\infty}dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$

定理5设有函数 $g(y)$ 使得 $|f(x,y)|\le g(y)$, $a\le x\le b$ $c\le y<+\infty$ 若 $\int_c^{+\infty} g(y)dy$ 收敛,则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。[1]

公式6(χ^2—分布)设总体 $X\sim N(0,1)$ 则随机变量 $x^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布,记作 $\chi^2\sim x^2(n)$,其密度为 =

$$\varphi(x)\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le0\end{cases}$$ [2]

Γ函数与B函数的性质

我们知道 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ (1),

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ (2),其中(1)式称为伽马函数,(2)式称为贝塔函数,二者统称为欧拉积分。Γ函数与B函数实际上是含参变量广义积分表示的两个特殊函数。

1 Γ函数的性质

1.1 Γ函数的定义域

1.1.1 当 $s\ge1$ 时,$x=0$ 不是被函数的瑕点,因此取 $p>1$ 都有 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(x^{s-1}e^{-x})=0$ 。

由柯西判别法Ⅰ知(1)式的积分是收敛的。

1.1.2 当 $s<1$ 时,$x=0$ 是被函数的瑕点,此时,有 $\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=I(s)+J(s)$, $J(s)$ 对任何 s 都是收敛的。又 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{1-s}(x^{s-1}e^{-x})=\lim\limits_{x\to0^+}e^{-x}=1$,故积分 $J(s)$ 在 $1-s<0$ 即 $s>0$ 是收敛的,而当 $1-s\ge1$ 即 $s\le0$ 时发散。综上可知 $\Gamma(s)$ 的定义域是 $s>0$ 。

1.2 Γ函数的连续性

$\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,由 $\Gamma(s)=I(s)+J(s)$,只需证 $I(s)$ 和 $J(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 为连续即可。在任何闭区间 $[a,b]$ $(a>0)$ 上对于函数 $I(s)$ 当 $0\le x\le1$ 时,有 $x^{s-1}e^{-x}\le x^{a-1}e^{-x}$,由于 $\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ 收敛,由定理5知 $I(s)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛;对于 $J(s)$,当 $1\le x<+\infty$ 时有 $x^{s-1}e^{-x}\le x^{b-1}e^{-x}$,因为 $\int_0^{+\infty}x^{b-1}e^{-x}dx$ 收敛,由定理5知 $J(s)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,所以 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上连续,即 $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

1.3 Γ函数的可微性

首先考虑积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 在任何闭区间 $[a,b]$ $(a>0)$ 上一致收敛。考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\ln x dx+\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$$

当 $0<a\le s$ 时,$|x^{s-1}e^{-x}\ln x|\le x^{a-1}|\ln x|$ $(0\le x\le1)$ 而积分 $\int_0^1 x^{a-1}|\ln x|dx$ 收敛。故积分 $\int_0^1 x^{s-1}\ln x\cdot e^{-x}dx$ 在 $0<a\le s$ 时一致收敛。

收稿日期:2014-03-15
作者简介:周晓晖(1980-),男,讲师,研究方向:基础数学。

同理，当$s\le b$时，$\left|x^{s-1}e^{-x}\ln x\right|\le x^{b-1}e^{-x}\ (x\ge 1)$故积分$\int_1^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$当$s\le b$时一致收敛。因此积分$\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$在$0<a\le s\le b$时一致收敛。由此可知$\Gamma(s)$在$a\le s\le b$上具有连续的导函数$\Gamma'(s)$且可在积分号下求导

$$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx \qquad (3)$$

由a,b的任意性可知$\Gamma'(s)$在$s>0$上连续且(3)式对一切$s>0$皆成立。类似地可证$\Gamma''(s)$在$s>0$上连续且可在(3)式积分号下求导。由数学归纳法可知，对任何正整数n，$\Gamma^{(n)}(s)$在$s>0$上都存在且连续并且可在积分号下求导数，得

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx \quad (s>0)$$

1.4 Γ函数的递推公式：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ (s>0)$

证明：$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^se^{-x}dx=-x^se^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$

$$=s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=s\Gamma(s)$$

由此可知，$\forall s\in(0,+\infty)$，如果$n<s\le n+1$（其中n是非负整数），即$0<s-n\le 1$有

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)=s(s-1)=\cdots=s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n) \quad (4)$$

特别地当s为正整数$n+1$时(4)式可写成

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots2\cdot1\Gamma(1)=n!\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=n!$$

推论1 由(4)式可知，如果已知$\Gamma(s)$在$0\le s\le 1$上的值，那么在其它范围内的值可由它计算出来；

推论2 若$\forall s>-1$，令$s!=\Gamma(s+1)$，则它可以作为$n!$的推广(即把原来的$n!$中的n以自然数推广到大于-1的非负整数情形)。[3]

1.5 Γ函数的极值与凸性

因为对一切$s>0$，$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx>0$，

$$\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^2dx>0$$

因此$\Gamma(s)$的图形位于s轴上方且凸的。

又因为$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$，

$$\Gamma(2)=\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$$

所以$\Gamma(1)=\Gamma(2)$，

由此，$\Gamma(s)$在$s>0$上有唯一的一个极小值点x_0落在(1,2)内。

1.6 Γ函数的延拓

由递推公式可得$\Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$ (5)，当$-1<s<0$时(5)式右端有意义，运用(5)式来定义左端函数$\Gamma(s)$在$(-1,0)$内的值，并且推得这时$\Gamma(s)<0$。同样利用$\Gamma(s)$已在$(-1,0)$内有定义，由(5)式又可定义$\Gamma(s)$在$(-2,-1)$内的值，而这时$\Gamma(s)>0$，依此下去可把$\Gamma(s)$延拓到整个数轴(除$s=0,-1,-2,\ldots$外)。[4]

1.7 Γ函数的其他形式

在(1)式中，若令$x=py$，则有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}(py)^{s-1}e^{-py}pdy=p^s\int_0^{+\infty}y^{s-1}e^{-py}dy \quad (s>0,p>0)\ (6)$$

在(1)式中，若令$x=y^2$，则有

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}y^{2(s-1)}e^{-y^2}2ydy=2\int_0^{+\infty}y^{2s-1}e^{-y^2}dy \qquad (7)$$

2 B函数的性质

2.1 B函数的定义域

由$B(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$的收敛性可知其定义域为$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$。

令$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$，则$f(x)$可能有两个瑕点$x=0,x=1$(视p,q的值而定)，故原积分可分为两个积分：$\int_0^{\frac12}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$与$\int_{\frac12}^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$来考虑使每一个积分中的被积函数至多含有一个瑕点。

先考虑积分$\int_0^{\frac12}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

2.1.1 当$p\ge 1$时，积分$\int_0^{\frac12}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$显然存在。

2.1.2 当$p<1$时，$f(x)$在$[0,\frac12]$上瑕点为$x=0$，又函数$f(x)$在$(0,\frac12]$上非负，故由

$\lim\limits_{x\to0^+}x^{1-p}[x^{p-1}(1-x)^{q-1}]=\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)^{q-1}=1$可知

当$1-p<1$，即$p>0$时$\int_0^{\frac12}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$收敛，

当$1-p\ge 1$，即$p\le 0$时$\int_0^{\frac12}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$发散。

再考虑积分$\int_{\frac12}^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

2.1.3 当$q\ge 1$时，此积分显然存在

2.1.4 当$q<1$时，$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$在$[\frac12,1]$上有瑕点$x=1$，且非负，故由$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{1-q}[x^{p-1}(1-x)^{q-1}]=\lim\limits_{x\to1^-}x^{p-1}=1$

可知：当$q>0$时$\int_{\frac12}^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$收敛；当$q\le 0$时，此积分发散。综上，当$p>0$且$q>0$时$\int_{\frac12}^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$收敛，所以$B(p,q)$的定义域为$p>0,q>0$。[5]

2.2 B函数的连续性

对任何$0<p_0\le p,0<q_0\le q$，有$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\le x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$，而积分$\int_0^1x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}dx$收敛，由定理(5)知$B(p,q)$在$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$内连续。

2.3 B函数的可微性

$B(p,q)$在$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$内可微且存在任意阶连续偏导数。考虑积分

$\int_0^1\frac{\partial}{\partial p}[x^{p-1}(1-x)^{q-1}]dx=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x dx$当$0<p_0\le p,q_0\le q$时，恒有$\left|x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x\right|\le x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\left|\ln x\right| \quad (0<x<1)$。而积分$\int_0^1x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\left|\ln x\right|dx$收敛，故积分$\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$当$p_0\le p,q_0\le q$时一致收敛。因此，当$p_0\le p,q_0\le q$时可在积分号下求导得$B'_p(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x dx$ (8) 并

且$B'_p(p,q)$是$p_0 \le p,\ q_0 \le q$上的连续函数。由$p_0>0, q_0>0$的任意性可得(8)式对一切$p>0,q>0$皆成立，且$B'_p(p,q)$是域$p>0,q>0$上的二元连续函数。

同理可证$B'_q(p,q)$是域$p>0,q>0$上的二元连续函数，且$p>0,q>0$时可在积分号下对q求导得

$$B'_q(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln(1-x)dx$$ 。

2.4 B函数的对称性

$B(p,q)=B(q,p)$，对B函数作变换，令$x=1-y$即可得证。

2.5 B函数的递推公式

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1) \qquad (p>0,q>1) \qquad (9)$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q) \qquad (p>1,q>0) \qquad (10)$$

$$B(p,q)=\frac{(q-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)} \qquad (p>1,q>1) \qquad (11)$$

3 Γ函数与B函数的关系

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (p>0,q>0) \qquad (12)$$

3.1 当$p>0,q>0$时，由(6)式知$\frac{\Gamma(p)}{t^p}=\int_0^{+\infty}y^{p-1}e^{-ty}dy$

一般地，$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$两边同乘以$t^{p-1}$并且在$[0,+\infty]$上对$t$积分得

$\int_0^{+\infty}\Gamma(p+q)\cdot\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_0^{+\infty}t^{p-1}dt\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy$，即

$\Gamma(p+q)B(p,q)=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$ 。

令 $f(t,y)=t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}$ $(t\ge 0,y\ge 0)$，显然，$f(t,y)$在$[0,+\infty]\times[0,+\infty]$上非负连续，又当$t>0$时，有

$$F(y)=\int_0^{\infty}f(t,y)dt=\int_0^{\infty}t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dt=e^{-y}y^{p+q-1}\int_0^{\infty}t^{p-1}e^{-ty}dt$$

$$=e^{-y}y^{p+q-1}\frac{1}{y}\Gamma(p)=y^{q-1}e^{-y}\Gamma(p)$$

当$y=0$时，$F(0)=0$，易知$F(y)$在$[0,+\infty)$上连续，而$\varphi(t)=\int_0^{+\infty}f(t,y)dy$，所以$\varphi(t)=t^{p-1}\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}dy=t^{p-1}\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}$，易知$\varphi(t)$在$[0,+\infty)$上连续。所以，$\int_0^{+\infty}f(t,y)dt$关于$y$在任一$[0,T]\subset[0,+\infty)$上一致收敛，$\int_0^{+\infty}f(t,y)dt$关于$t$在任一$[0,T]\subset[0,+\infty)$上一致收敛。由定理(4)知，

$\Gamma(p+q)B(p,q)=\int_0^{+\infty}[y^{p+q-1}e^{-y}\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-ty}dt]dy=\Gamma(p)\Gamma(q)$，

所以$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ 。[6]

3.2 当p,q为正整数时，其结论可由(11)式直接得出。

3.3 特别的，当$p+q=1$时，有$B(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p}$

此公式又称为余元公式。[7]

4 Γ函数与B函数的应用

4.1 在数学分析中的应用

例1.用Γ函数计算$I_n=\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$

解：$I_n=\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x^2)^{(n+\frac{1}{2})-1}e^{-x^2}dx^2=\frac{1}{2}\Gamma(n+\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma(\frac{1}{2})$$

例2.用B函数计算$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x dx$（$m,n$为自然数）

解：$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2\cdot\frac{n+1}{2}-1}(\cos x)^{2\cdot\frac{n+1}{2}-1}dx=\frac{1}{2}B(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2}+1)}$

例3.用余元公式计算$\Gamma(\frac{1}{2})$的值。

解：$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}=\sqrt{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2})}=\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\pi}$

例4.求曲线$|x|^n+|y|^n=a^n$ $(n>0,a>0)$所界面积。

解：设所界面积为S，由题意得$S=4\int_0^a(a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}dx$

令$t=\frac{x}{a}$，得$S=\frac{4a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}dt=\frac{4a^2}{n}B(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1)=\frac{2a^2[\Gamma(\frac{1}{n})]^2}{n\Gamma(\frac{2}{n})}$

4.2 在概率论中的应用

例5.求下列分布密度中的常数c使之成为概率密度函数。

(1) $f(x)=\begin{cases} cx^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0<x<1 \quad (p>0,q>0) \\ 0 & x\text{是其他值} \end{cases}$

(2) $f(x)=c(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$ $(x\in R)$

解：(1)$\because \int cx^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=1$，$cB(p,q)=1$

$\therefore c=\frac{1}{B(p,q)}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}c(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx=1$，$\because f(x)=(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$为偶函数

令$t=\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}}$，$x=[n(t-\frac{1}{2})]^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$原式左边

$$=2c\int_0^{+\infty}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx=\sqrt{n}c\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\sqrt{n}cB(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$$

$\therefore c=\frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})}$

例6.求下列分布的期望与方差。

(1)随机变量$\zeta\sim\Gamma(t,\lambda)$即 $f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^t}{\Gamma(t)}x^{t-1}e^{-\lambda t} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$

(2)贝塔分布$B(p,q)$

$f_\zeta(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0<x<1 \\ 0 & x\text{是其他值}\end{cases}$

解:(1) $E\zeta=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^t}{\Gamma(t)}x^te^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^te^{-\lambda x}d(\lambda x)=\frac{\Gamma(t+1)}{\lambda\Gamma(t)}=\frac{t\Gamma(t)}{\lambda\Gamma(t)}=\frac{t}{\lambda}$

同理 $E\zeta^2=\frac{t(t+1)}{\lambda^2}$ $\therefore D\zeta=E\zeta^2-(E\zeta)^2=\frac{t}{\lambda^2}$

(2) $E\zeta=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}xdx=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot B(p+1,q)$

$$=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\Gamma(p+q)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}=\frac{p}{p+q}$$

同理 $E\zeta^2=\frac{(p+q)p}{(p+q+1)(p+q)}$，$D\zeta=E\zeta^2-[E\zeta]^2=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}$。[8]

例7.设随机变量 $\zeta\sim\Gamma(t_i,\lambda)$ $t_i>0,\lambda>0$ $i=1,2$，且 ζ_1 与 ζ_2 独立,则 $\zeta_1+\zeta_2\sim\Gamma(t_1+t_2,\lambda)$。

证明:$\because$ $\zeta_i\sim\Gamma(t_i,\lambda)$

$$\therefore f_{\zeta i}(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{ti-1}}{\Gamma(t_i)} & x\geq 0, i=1,2\end{cases}$$

由卷积公式知,

当 $z<0$ 时，$f_{\zeta_1+\zeta_2}(z)=0$

当 $z\geq 0$ 时，$f_{\zeta_1+\zeta_2}(z)=\int_0^z\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t_1-1}}{\Gamma(t_1)}\cdot\frac{\lambda e^{-\lambda(z-x)}[x(z-x)]^{t_2-1}}{\Gamma(t_2)}dx$

$$=\frac{e^{-\lambda z}\lambda^{t_1+t_2}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}\int_0^z x^{t_1-1}(z-x)^{t_2-1}dx$$

令 $x=zu$,有 $f_{\zeta_1+\zeta_2}(z)=\frac{e^{-\lambda z}z^{t_1+t_2-1}\lambda^{t_1+t_2}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}\int_0^1u^{t_1-1}(1-u)^{t2-1}du$

$$=\frac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{t_1+t_2-1}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)B(t_1,t_2)}=\frac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{t_1+t_2-1}}{\Gamma(t_1+t_2)}$$

$\therefore\zeta_1+\zeta_2\sim\Gamma(t_1+t_2,\lambda)$。

由此可见,将Γ函数与B函数及其关系应用于解概率题,可以使繁杂的解题过程简化易懂。不论是在数学分析,还是概率统计中,运用Γ函数与B函数解题的关键都是经换元或变形,使其具有Γ函数与B函数的定义形式,然后再应用它们的性质及相互关系。

注释及参考文献:

[1]华东师范大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社,1999.

[2]魏宗舒等.概率论与数理统计教程[M].北京:高等教育出版社,2009.

[3]严镇军.复变函数[M].合肥:中国科技大学出版社,2001.

[4]娄本平,纪荣芳.Γ—函数的性质及其应用[J].泰安师专学报,2002(3):12-13.

[5]张永金,李五明.关于Γ函数和B函数的一些应用[J].安康学院学报,2007,(02):80-82.

[6]胡淑荣.Γ函数及应用[J].哈尔滨师范大学自然科学学报,2002(4):12-15.

[7]罗会兰.余元公式Γ(a)Γ(1-a)=π/(sinπa)及其他[J].邵阳高等专科学校学报,1994 (4):301-304.

[8]徐群芳.Γ函数在概率论计算中的应用[J].西安联合大学学报,2002(4):64-66.

The Properties and Applications of Γ Function and B Function

ZHOU Xiao-hui

(Lianyungang Finance and Economics Branch, Jiangsu United Technical Institute, Lianyungang, Jiangsu 222003)

Abstract: Γ Function and B Function are integral with variable. They are collectively known as the Euler Integral with extensive application in Mathematical analysis and probability statistics. This paper discusses the concepts ,natures and relationships of Γ Function and B Function, gives the detailed proofs and then reveals the relationship and rule to solve the problem.

Key words: Γ Function ; B Function ; variable integral ; continuous ; convergent; divergent