高等数学案例教学法的研究*

李宝萍
(安徽三联学院,安徽 合肥 230601)

【摘　要】高等数学教学的理论性与严密性往往让学生产生了畏惧感,而案例教学可以把抽象的数学理论具体化、应用化,结合经济领域中的两个案例研究得知,案例教学法可以激发学生的学习兴趣、培养学生的应用和创造能力、提高教学质量。

【关键词】高等数学;案例教学;应用能力
【中图分类号】O13-4　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2013)04-0145-03

高等数学是应用型本科院校理工科、经管类学生必修的一门基础课程。这门课程的教学方式往往重视逻辑推理的严密性与知识体系的完整性,忽略了数学理论与现实生活联系的密切性,经常使得教学内容趋于理论化、抽象化与系统化,而忽视了理论的可操作性、可应用性,结果很多学生对高等数学学习产生了错觉,产生了畏惧感,误认为高等数学是一门与实际联系无关的、抽象难懂的课程,殊不知高等数学已广泛应用于理学、工学、经济学、管理学等各个领域。这就要求教师在教学过程中能将高等数学理论与应用实际联系起来,通过教学案例来展现数学理论的精髓与应用,激发学生的学习兴趣、培养学生的应用和创造能力、提高教学质量。

1 在高等数学教学中案例教学法的重要性

所谓案例教学法,就是将应用案例作为教学材料,结合教学理论内容,通过对案例进行合理的讨论、分析和推导,从而引出数学理论知识,让学生掌握到解决案例相关的数学概念、理论和方法,从而培养学生应用能力的一种教学方法。相比于传统的教学方法,案例教学法有如下几大的优势:

(1)案例教学可以把抽象的数学概念、数学理论具体化,通过对案例的提出、解决,学生可以清楚地掌握到这些数学概念、理论的真正含义与应用。

(2)案例教学在课堂中提供了一种数学的教学情景,让学生在特定的案例环境中对问题进行认真地思考、分析、归纳与决策,把握问题的关键所在,进一步培养了学生分析问题、解决实际问题的能力。

(3)案例教学可以改变学生认为的数学教学其实是纸上谈兵的错觉,拉近了课堂教学与现实实际联系的距离。

(4)案例教学法能够拓宽学生的思路,调动学生的学习积极性和求知欲,激发学生的学习兴趣,培养学生的数学思维和数学应用意识。

由此可见,在高等数学教学中案例教学法具有切实的重要性和可行性,在教学过程中应加以重视和应用。

2 经济领域中的几个案例分析

案例1　最优化的产出水平问题

多元函数极值、最值的理论与方法是高等数学非常重要的理论知识之一,而多元函数偏导数计算又是一种重要的数学方法,在经济领域中偏导数又有相应的经济意义,在教学过程中可以结合经济方面的最优化问题加深学生对这两方面知识的理解与应用。

假设某厂生产两种产品,在生产过程中,两种产品的产量q_1和q_2是不相关的,但两种产品在生产技术上又是相关的。这样,不仅总成本C是产量q_1和q_2的函数$C=C(q_1,q_2)$,而且两种产品的边际成本(分别用MC_1、MC_2表示)也是q_1和q_2的函数:

$$MC_1=\frac{\partial C}{\partial q_1}=C_1(q_1,q_2),\ MC_2=\frac{\partial C}{\partial q_2}=C_2(q_1,q_2)$$

经济学中一般总认为产出水平与销售水平是一致的,所以总收益R也是q_1和q_2的函数$R=R(q_1,q_2)$。现在问如何确定每种产品的产量,可使厂商获得最大的利润?

分析:厂商的利润函数是$L(q_1,q_2)=R(q_1,q_2)-C(q_1,q_2)$

由极值存在的必要条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=\dfrac{\partial R}{\partial q_1}-\dfrac{\partial C}{\partial q_1}=MR_1-MC_1=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial q_2}=\dfrac{\partial R}{\partial q_2}-\dfrac{\partial C}{\partial q_2}=MR_2-MC_2=0\end{cases}$$

可得 $\begin{cases}MR_1=MC_1\\ MR_2=MC_2\end{cases}$　　(*)

(其中$MR_1=\dfrac{\partial R}{\partial q_1},MR_2=\dfrac{\partial R}{\partial q_2}$是边际收益)

由(*)式可知:当每种产品的产量达到能使边

收稿日期:2013-08-27
*基金项目:安徽三联学院2012年度院级质量工程项目(项目编号:12zlgc026)。
作者简介:李宝萍(1976-　),女,硕士,讲师,研究方向:高等数学应用研究。

际收益和边际成本恰好相等时，厂商可获得最大利润。

例1：某工厂生产两种产品，这两种产品的总成本函数为$C(q_1,q_2)=q_1^2+2q_1q_2+q_2^2+5$，需求函数分别为$q_1=26-P_1$，$q_2=10-\frac{1}{4}P_2$，试问这两种产品的产量分别是多少，可使该工厂获得最大利润？

解：由$q_1=26-P_1$，$q_2=10-\frac{1}{4}P_2$可知两种产品的价格分别为$P_1=26-q_1$，$P_2=40-4q_2$，则总收益函数为$R(q_1,q_2)=P_1q_1+P_2q_2=26q_1+40q_2-q_1^2-4q_2^2$

根据(*)式，有$\begin{cases}26-2q_1=2q_1+2q_2\\40-8q_2=2q_1+2q_2\end{cases}$

解得：$q_1=5$，$q_2=3$

可以验证此组解满足极值存在的充分条件，因此，当两种产品的产量分别为5和3时，工厂可获最大利润，最大利润为$L_{max}=L(5,3)=R(5,3)-C(5,3)=120$

现在假设某厂商经营两个工厂，这两个工厂生产同一产品且在同一市场上销售。但由于两厂的经营情况不同，生产成本有所差别。现在问如何确定每个工厂的产量，可使厂商获得最大利润？

分析：设这两个工厂的产量分别为q_1、q_2，两个工厂的成本函数分别是$C_1=C_1(q_1)$和$C_2=C_2(q_2)$，则

总成本函数为$C=C_1(q_1)+C_2(q_2)$

总收益函数为$R=R(Q)$（其中$Q=q_1+q_2$为总产量）

故利润函数为$L(q_1,q_2)=R(Q)-C_1(q_1)-C_2(q_2)$

由极值存在的必要条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=\dfrac{dR}{dQ}\cdot\dfrac{\partial Q}{\partial q_1}-\dfrac{dC_1}{dq_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial q_2}=\dfrac{dR}{dQ}\cdot\dfrac{\partial Q}{\partial q_2}-\dfrac{dC_2}{dq_2}=0\end{cases}$$

可得$R'(Q)=C_1'(q_1)=C_2'(q_2)$

即$MR=MC_1=MC_2$ (**)

(**)式说明：当两个工厂的产量达到使每个工厂的边际成本都等于边际收益时，可使厂商获得最大利润。

例2：一厂商经营两个工厂，它们的成本函数分别是$C_1=3q_1^2+2q_1+6$和$C_2=2q_2^2+2q_2+4$，价格函数为$P=74-6Q$，其中$Q=q_1+q_2$，为使厂商获得最大利润，试求每个工厂的产出水平。

解：因$C_1'(q_1)=6q_1+2$，$C_2'(q_2)=4q_2+2$，而总收益函数为$R=P\cdot Q=74Q-6Q^2$，边际收益为$MR=74-12Q$。

故由(**)式，得$\begin{cases}74-12(q_1+q_2)=6q_1+2\\74-12(q_1+q_2)=4q_2+2\end{cases}$

即$\begin{cases}3q_1+2q_2=12\\3q_1+4q_2=18\end{cases}$

解得：$q_1=2$，$q_2=3$

可以验证此组解满足极值存在的充分条件，因此，当两个工厂的产量分别为$q_1=2$和$q_2=3$时厂商可获得最大利润，最大利润为$L_{max}=L(2,3)=R(2,3)-C_1(2)-C_2(3)=170$

通过对以上案例的分析，一方面加深了学生对多元函数极值、最值的理论和多元函数偏导数等知识的理解，另一方面又让学生掌握了多元函数偏导数和最值的方法在实际中的相关应用。用理论教学、案例分析的方式，将原本枯燥的数学理论知识形象化、生动化，激发了学生的学习热情，提高了教学质量。

案例2 怎样计算均匀货币流的价值

定积分概念中的微元法理论和定积分应用一直是学生认为较抽象、较难懂的部分，在教学过程中可以结合银行中“计算均匀货币流价值”的案例来激发学生的学习兴趣，加深对这两部分理论知识的理解。

将A元现金存入银行，年利率按r计算，若用连续计息方式结算，t年后的存款总额为$a(t)=Ae^{rt}$，因此，A元现金T年后的价值为Ae^{rT}，称Ae^{rT}为A元现金T年后的期末价值；相反，现有的A元现金相当于T年前把Ae^{-rT}元现金存入银行所得的，所以现有的A元现金T年前的价值为Ae^{-rT}，且称Ae^{-rT}是A元现金T年之前的贴现价值。

在银行业务中有一种叫“均匀流”的存款方式—使钱币像水流一样按定常流量a源源不断地存入银行。比如商店每天把固定数量的营业额存入银行，就类似于这种方式。

例1：假设从t=0时开始按均匀流的方式向银行存款，年流量为a元，年利率为r(按连续计息结算)，试求T年后在银行的存款有多少(期末价值)？这些存款相当于初始时的多少元现金(贴现价值)？

解：根据连续计息结算方式可知，向银行存入A元，T年之后的存款额为Ae^{rT}。现对均匀货币流采用微元法计算：

在$[t,t+\Delta t]$内向银行存入$a\Delta t$元，T年后这些存款的存期是$T-t$，相应的存款额变为

$a\Delta t^{r(T-t)}=aet^{r(T-t)}\Delta t$

因此，T年后均匀货币流的总存款额为

$$F=\int_0^T ae^{r(T-t)}dt=\frac{a}{r}[-e^{r(T-t)}]_0^T=\frac{a}{r}(e^{rT}-1) \quad (*)$$

这就是均匀货币流的期末价值。

这F元现金相当于初始时的Fe^{-rT}元,故

$$P = Fe^{-rT} = \frac{a}{r}(e^{rT}-1)e^{-rT} = \frac{a}{r}(1-e^{-rT})$$

这就是均匀货币流的贴现价值。

例2:某公司一次投资了100万元建造一条生产流水线,并在一年后建成投产,开始取得经济效益。设流水线的收益是一种均匀货币流,年流量为30万元。已知银行的年利率为10%,问几年后该公司可以收回投资?

解:设x+1年后可以收回投资,此时流水线共运行了x年,按照公式(*)可以计算出x年中流水线的总效益是

$$A(x) = \frac{a}{r}(e^{rx}-1) = \frac{30}{0.1}(e^{0.1x}-1) \quad (万元)$$

这A(x)万元在x+1年之前(即开始投资时)的价值是

$$B(x) = A(x)e^{-r(x+1)} = \frac{30}{0.1}(e^{0.1x}-1)e^{-0.1x}\cdot e^{-0.1} = 300e^{-0.1}(1-e^{-0.1x}) \quad (万元)$$

因此,当B(x)=100万元时恰好收回投资,即

$$300e^{-0.1}(1-e^{-0.1x})=100$$

解方程,可得:

$$x = 10\ln\frac{3}{3-e^{0.1}} \approx 4.6 年$$

所以,5.6年后该公司可以收回全部的投资。

通过对以上案例的讲解,不仅加深了学生对定积分概念和微元法理论的理解,同时让学生掌握到定积分在实践中的具体应用。用理论结合实际的教学模式,扩宽了学生的知识面,增强了学生的学习兴趣。

在课堂教学过程中通过案例教学的实施,不仅可以加深学生对高等数学理论知识的理解,而且可以让他们切身地感受到数学知识绝对不是纸上谈兵,而是广泛应用于客观实际中。在课堂教学中穿插数学应用案例,增强了学生的数学素养,提高了学生的学习兴趣,进一步培养了学生发现问题、分析问题以及解决问题的能力,这对日后更高层次地培养学生的实际应用能力和创新能力起了非常重要的作用。

注释及参考文献:

[1]李心灿.高等数学应用205例[M].北京:高等教育出版社,1997.
[2]赵树嫄.经济应用数学基础-微积分(修订版)[M].北京:中国人民大学出版社,1993.
[3]刘应辉.经济应用数学(上册)[M].北京:中国财政经济出版社,1991.
[4]金慧萍,吴妙仙.高等数学实践教学之探讨-基于在经济领域的应用[J].丽水学院学报,2010,32(2):76-78.
[5]钱志良.论案例教学在《高等数学》教学中的重要性与可行性[J].常州信息职业技术学院学报,2010,9(2):50-52.

The research on Case Teaching of Higher Mathematics

LI Bao-ping
(*Anhui Sanlian University, Hefei, Anhui 230601*)

Abstract: Theoretical property and strictness of higher mathematics teaching often makes students have a sense of fear, but the method of case teaching can make abstract mathematical theory specific and practical, through the research on two cases in economic filed, we know that case teaching method can stimulate students' interest in learning, develop students' application and creative ability, and improve the quality of teaching.

Key words: Higher mathematics; Case teaching; Application ability