

极点和输出方差约束下的低成本输出反馈控制器设计

耿红梅

(扬州工业职业技术学院 文理系, 江苏 扬州 225127)

【摘要】本文先给出问题的BMI描述,然后借鉴求解区域极点约束下输出反馈低成本控制的方法,设计静态输出反馈低成本控制器,使得系统同时满足区域极点指标和稳态输出方差指标,并给出了相应的满足条件的迭代求解算法。

【关键词】静态输出反馈,低成本,输出方差,BMI, path-following 方法。

【中图分类号】O231 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1883(2013)04-0039-03

1 引言

在实际的工程系统中,系统的输出方差和状态方差经常用来度量很多性能指标,而且也经常用在辨识、模型降阶、参数估计等方面的许多理论和方法中。因此,为了满足系统的一些性能要求和将系统中的建模与控制有效的统一,就需要系统具有一定的输出或状态协方差。因而系统的协方差控制就是指通过给系统配置相应的输出方差或状态协方差的一种控制。

通常,闭环系统要保障具有所期望的一些性能指标就可以通过使其稳态输出方差不超出某个给定的范围。有一大类的控制系统,可以通过系统的输出方差或其上界形式来刻画其精确度指标。要保证一个系统具有优良的过渡过程品质,就需要此系统能够同时具有良好的稳态特性和良好的瞬态性能。因此研究方差和区域极点约束结合起来的鲁棒方差约束问题才更加具有实际应用价值。

2 问题描述

考虑由以下状态方程描述的线性定常连续系统

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + Nu(t) + Dw(t) \quad (1.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (1.1b)$$

$$z(t) = C_1x(t) \quad (1.1c)$$

其中 $x(t) \in R^n$ 是系统的状态, $y(t) \in R^p$ 为输出, $u(t) \in R^m$ 是控制输入, $z(t) \in R^q$ 是系统的被控输出,测量噪声 $v(t)$ 与外干扰 $w(t) \in R^s$ 都是零均值高斯白噪声,且 $v(t)$ 与 $w(t)$ 不相关,他们的强度分别为 V, W , 初始状态 $x(0)$ 是 0 均值的,并且与 $w(t)$ 是不相关的,而系数矩阵。

要设计静态输出反馈控制器

$$u(t) = Ky(t), \quad K \in K \quad (1.2)$$

使得相应闭环系统(其中 $M_K = M + NK C$)

$$\dot{x}(t) = M_K x(t) + NK v(t) + Dw(t) \quad (1.3a)$$

$$z(t) = C_1 x(t) \quad (1.3b)$$

在满足如下区域极点约束和输出方差约束下相应有关输出反馈控制成本尽可能的低:

(1) 闭环系统的极点位于图1无界扇形区域 $S(\alpha, \theta)$ 内;

(2) 闭环系统的输出方差矩阵 Z 满足 $Z_{1i} < \sigma_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, q$)。

其中稳态输出方差矩阵 Z 在闭环系统(1.3)渐进稳定时由下式定义

$$Z = \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E \{ z(t) z(t)^T \} \quad (1.4)$$

这里 $E(\cdot)$ 表示随机变量的期望。

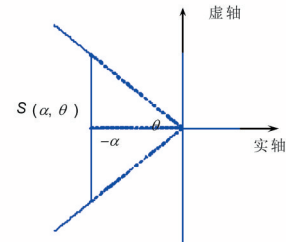


图1

3 区域极点和方差约束下低成本输出反馈控制器设计

首先要给出输出方差约束的一种BMI描述。当闭环系统(1.3)渐进稳定时,系统的稳态状态协方差矩阵

$$Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E \{ q(t) q(t)^T \} \text{ 存在, 且是如下代数方程 } QM_K + M_K^T Q + DWD^T + NKVK^T N^T = 0 \quad (1.5)$$

的唯一正定解;而相应的输出方差矩阵 Z 则满足^[31]: $Z = C_1 Q C_1^T$ 。

由 Lyapunov 方程的解的单调性,及 Schur 补引理,可得到如下定理。

定理1 对于 $K \in K$, 如果 P3 使得如下不等式组成立

收稿日期:2013-08-22

作者简介:耿红梅(1982-),女,讲师,研究方向:教育学、运筹与控制论。

$$H_3(P_3, K) = \begin{bmatrix} M_K P_3 + P_3 M_K^T + DWD^T & * \\ VK^T N^T & -V \end{bmatrix} < 0 \quad (1.6)$$

$$[C_1 P_3 C_1^T]_{ii} < \sigma_i^2 \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (1.7)$$

则反馈增益 K 相应闭环系统(1.3)的稳态输出方差矩阵满足约束(2)。

对输出反馈增益矩阵 $K \in K$, 考虑如下极小值问题:

$$t(K) = \inf t : t, P_1, P_2, P_3, K \text{ 满足: (1.7) 及 } P_1 M_K + M_K^T P_1 + 2\alpha P_1 < tI \quad (1.8)$$

$$\begin{bmatrix} \tan \theta (P_2 M_K + M_K^T P_2) & * \\ M_K^T P_2 - P_2 M_K & (1,1) \end{bmatrix} < tI \quad (1.9)$$

$$t > -\varepsilon, P_1 > I, P_2 > I, P_3 > 0 \quad (1.10)$$

$$\begin{bmatrix} M_K P_3 + P_3 M_K^T + DWD^T - tI & * \\ VK^T N^T & -V \end{bmatrix} < 0 \quad (1.11)$$

定理 2 若存在输出反馈增益 K, 使得 (1.7)-(1.11) 对应的 $t(K) < 0$, 则闭环系统满足区域极点和输出方差约束(1)和(2)。

下面给出求解区域极点和方差上界约束的输出反馈增益算法。

算法 1: 和约束输出反馈增益求解算法

Step1 在 K 内随机均匀地生成 N 个初始反馈矩阵 $K_s (s=1, 2, 3, \dots, N)$, 并令 $s=1$ 。

Step 2 令 $j=1, K^{(j)}=K_s$;

Step 3 令,

$t(j) = \min t : t, P_1, P_2, P_3$ 满足(3.2.7)-(3.2.10)及

$$\begin{bmatrix} M_j P_3 + P_3 M_j^T + DWD^T - tI & * \\ V(K^{(j)})^T N^T & -V \end{bmatrix} < 0 \quad (1.11')$$

若 $t_j < 0$, 令 $t(s) = t(j), KK(:, :, s) = K^{(j)}$ 则 $KK(:, :, s)$

即是从 K_s 开始迭代得到的满足极点配置和方差约束要求的期望输出反馈增益, 再令 $s = s + 1$, 返回 Step 2; 否则, 记想要极小点为 $P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}$ 。

Step 4 令 $P_1 = P_1^{(j)} + \delta P_1, P_2 = P_2^{(j)} + \delta P_2, P_3 = P_3^{(j)} + \delta P_3, K = K^{(j)} + \delta K$, 解 BMI 组(1.7)关于 $P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}, K^{(j)}$:

$\min t; \delta P_1, \delta P_2, \delta P_3, \delta K, t$ 满足如下不等式组:

$$(P_1^{(j)} + \delta P_1)(M_j + \alpha I) + P_1^{(j)} N \delta K C + [*]^T - tI < 0$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} - tI & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{11} - tI \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_3 + DWD^T - tI & * \\ V(K + \delta K)^T N^T & -V \end{bmatrix} < 0$$

$$[C_1 (P_3 + \delta P_3) C_1^T]_{ii} < \sigma_i^2 \quad (i=1, 2, \dots, q)$$

$$-\tau_1 P_1^{(j)} < \delta P_1 < \tau_1 P_1^{(j)}, -\tau_2 P_2^{(j)} < \delta P_2 < \tau_2 P_2^{(j)}, -\tau_3 P_3^{(j)} < \delta P_3 < \tau_3 P_3^{(j)}$$

$$t > -\varepsilon_1, (\delta K)^T \delta K < \tau^2 I, K^{(j)} + \delta K \in K$$

其中 $\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ 为摄动幅度, 而

$$\Phi_{11} = \tan \theta \{ [(P_2 + \delta P_2) M_j + P_2 N \delta K C] + [*]^T \}$$

$$\Phi_{21} = M_j^T (P_2^{(j)} + \delta P_2) - (P_2^{(j)} + \delta P_2) M_j + (\delta K C)^T N^T P_2^{(j)} - P_2^{(j)} N \delta K C$$

$$\Phi_3 = [M_j (P_3 + \delta P_3) + N \delta K C P_3] + [*]^T$$

并记相应极小点为 δK_{j+1} 。

Step 5 令 $j=j+1, K_{j+1} = K_{j+1} + \delta K_{j+1}$, 返回 Step 3;

Step 6 若 $|t(j-1) - t(j)| \leq \varepsilon_2$, 或者 ($j = J$ 为最大迭代次数), 则令 $T(s) = t(j), KK(:, :, s) = K^{(j)}$, 结束关于 j 的内循环, 并令 $s = s + 1$, Step 2; 除非 $s = N$, 结束关于 s 的外循环。

从算法 1 得到满足极点和方差约束的系列输出反馈增益矩阵后, 将它们作为初始矩阵, 再用一次摄动线性化方法, 有以下求取满足区域极点和方差约束下的低成本控制设计算法。

算法 2: 极点和方差约束下低成本输出反馈控制器设计算法

Step1 初始化: $s=1$, 记算法 1 计算所得的 S 个满足极点约束的反馈增益矩阵系列为 KK ;

Step 2 $j=1$, 初始反馈增益 $K^{(j)} := KK(:, :, s)$;

Step 3 $M_j = M + NK^{(j)}C$, 解三个极小值问题 ($tr(P)$ 表示实方阵 P 的迹),

$$\min tr(P_1^{(j)}) \text{ 满足: } P_1^{(j)} > I,$$

$$P_1^{(j)}(M_j + \alpha I) + (M_j + \alpha I)^T P_1^{(j)} < 0$$

$$\min tr(P_2^{(j)}) \text{ 满足: } P_2^{(j)} > I,$$

$$\begin{bmatrix} \tan \theta (P_2^{(j)} M_j + M_j^T P_2^{(j)}) & P_2^{(j)} M_j - M_j^T P_2^{(j)} \\ M_j^T P_2^{(j)} - P_2^{(j)} M_j & \tan \theta (P_2^{(j)} M_j + M_j^T P_2^{(j)}) \end{bmatrix} < 0$$

$$\min tr(P_3^{(j)}) \text{ 满足: } P_3^{(j)} > 0,$$

$$M_j P_3^{(j)} + P_3^{(j)} M_j^T + DWD^T + NK^{(j)} V (NK^{(j)})^T < 0$$

$$[C_1 P_3 C_1^T]_{ii} < \sigma_i^2 \quad (i=1, 2, \dots, q)$$

并记相应的极小阵为 $P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}$,

Step4 令 $P_1 = P_1^{(j)} + \delta P_1, P_2 = P_2^{(j)} + \delta P_2, P_3 = P_3^{(j)} + \delta P_3, K = K^{(j)} + \delta K$, 解 BMI 组关于 $P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}, K_j$ 的摄动 LMI 约束极小值问题:

$$t_j = \min \sum_{kl} |K^{(j)} + \delta K|_{kl} \delta P_1, \delta P_2, \delta P_3, \delta K \text{ 满足}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 + \Phi_1^T & * & * \\ N^T P & -I & * \\ \delta K C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.12)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{11} & * & * & * & * \\ N^T \delta P & 0 & -\beta^{-1} I & * & * & * \\ \delta K C & 0 & 0 & -\beta^{-1} I & * & * \\ 0 & N^T \delta P & 0 & 0 & -I & * \\ 0 & \delta K C & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.13)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_3 + DWD^T & * & * & * \\ V(K + \delta K)^T N^T & -V & 0 & 0 \\ C \delta P_3 & 0 & -I & 0 \\ (\delta K)^T N^T & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.14)$$

$$[C_1(P_3 + \delta P_3)C_1^T]_{ii} < \sigma_i^2 \quad (i=1, 2, \dots, q)$$

$$-\tau_1 P_1^{(j)} < \delta P_1 < \tau_1 P_1^{(j)} \quad -\tau_2 P_2^{(j)} < \delta P_2 < \tau_2 P_2^{(j)} \quad -\tau_3 P_3^{(j)} < \delta P_3 < \tau_3 P_3^{(j)}$$

$$(\delta K)^T \delta K < \tau^2 I \quad K^{(0)} + \delta K \in K$$

其中 $\Phi_1 = [(P_1 + \delta P_1)(M_j + \alpha I) + P_1 N \delta K C]$

$$\Phi_{11} = \tan \theta \{ [(P_2 + \delta P_2)M_j + P_2 N \delta K C] + [*]^T \}$$

$$\Phi_{21} = M_j^T (P_2^{(j)} + \delta P_2) - (P_2^{(j)} + \delta P_2)M_j + (\delta K C)^T N^T P_2^{(j)} - P_2^{(j)} N \delta K C$$

$$\Phi_3 = [M_j (P_3 + \delta P_3) + N \delta K C P_3] + [*]^T$$

并记相应的极小点为 δK_{j+1} 。

Step 5 若 $|t_j - 1 - t_j| > \varepsilon$ (其中 ε 是小正数, 如可取 $\varepsilon = 0.00001$)。且 $j < J$ (为迭代次数的最大值), 则令 $K^{(j+1)} := K^{(j)} + \delta K_{j+1}$, $M_{j+1} := M_j + N \delta K_{j+1} C$, $j := j + 1$, 返回 Step 3; 否则, 结, 并记相应反馈增益为 $K_j(:, :, s) = K^{(j)}$ 。又若 $s < S$, 令 $s = s + 1$, 返回 Step 2, 否则, 结束关于 s 的外循环。

Step 6 比较所得 S 个反馈增益矩阵, 找出 0 元素及就非常接近 0 元素个数最多的, 得到成本相对的输出反馈控制增益。

注 1.1 不等式(1.14)是不等式(1.6)关于 P_3 及 K 的摄动的强不等式, 及若摄动量 δP_3 和 δK 满足不等式(1.14), 则 $G_3(P_3 + \delta P_3, K + \delta K) < 0$ 。

4 数值演算举例

假设系统(1.1)中的系数矩阵如下

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -26.668 \\ 0 & 1 & -7.317 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0.2 & \\ & 0.2 \end{bmatrix}$$

极点位于所示的切角无界区域 $S(1.5, \pi/4)$ 内, $K = \{K \in R^{2 \times 2} : |K(i, j)| < 5\}$, 输出方差上界指标为 $\sigma_1 = 1.8, \sigma_2 = 2.3$ 。

计算时, 取 $\varepsilon = 10^{-6}$, K 的摄动取为 $\tau = 0.4$, 所有 P_i 矩阵的摄动取为 $\tau_i = 0.4$, 最大迭代次数。用算法 1 进行运算, 得到八个满足区域极点和方差上界约束的反馈增益矩阵, 然后把这八个反馈增益矩阵作为初始矩阵, 再利用算法 2 进行计算, 分别得

$$K_j(:, :, 1) = \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.6802 \\ 0.3622 & -0.6866 \end{bmatrix}, \quad K_j(:, :, 2) = \begin{bmatrix} 0.4411 & -0.0011 \\ -0.0362 & 1.1076 \end{bmatrix}$$

$$K_j(:, :, 3) = \begin{bmatrix} 0.4378 & -0.0011 \\ -0.0379 & 1.1093 \end{bmatrix}, \quad K_j(:, :, 4) = \begin{bmatrix} 0.4388 & -0.0008 \\ -0.0376 & 1.1088 \end{bmatrix}$$

$$K_j(:, :, 5) = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.6514 \\ 0.3671 & -0.7100 \end{bmatrix}, \quad K_j(:, :, 6) = \begin{bmatrix} 0.4375 & -0.0011 \\ -0.0380 & 1.1095 \end{bmatrix}$$

$$K_j(:, :, 7) = \begin{bmatrix} 0.4380 & -0.0011 \\ -0.0378 & 1.1092 \end{bmatrix}, \quad K_j(:, :, 8) = \begin{bmatrix} 0.4406 & -0.0009 \\ -0.0370 & 1.1076 \end{bmatrix}$$

观察得到 8 个反馈增益矩阵, 有的矩阵中有一个元素为零或非常接近零, 例如可选

$$K_j(:, :, 1) = \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.6802 \\ 0.3622 & -0.6866 \end{bmatrix}$$

注意到闭环系统的极点是 K 的连续函数, 因而将上述矩阵中的近似 0 元素换成 0, 相应闭环系统的极点很有希望仍指定的扇形区域内。事实上, 相应矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -0.6802 \\ 0.3622 & -0.6866 \end{bmatrix}$$

作为反馈输出增益矩阵, 相应闭环极点为

$$-1.6577 + 0.4395i, \quad -1.6577 - 0.4395i, \quad -2.0000$$

位于指定的区域内, 而相应的输出方差矩阵为

$$Z = \begin{bmatrix} 2.9849 & -0.2467 \\ -0.2467 & 0.2122 \end{bmatrix}, \quad \text{满足上界约束: } Z_{11} < \sigma_1^2 = 1.8^2, \quad Z_{22} < \sigma_2^2 = 2.3^2。$$

5 小结

本章对于连续线性定常系统, 先用 BMI 方法描述出系统满足指定的区域极点指标和输出方差上界指标, 即把静态输出反馈的控制问题通过 BMI 的约束优化问题来表示。然后利用文献[1]中求解 BMI 问题的 path-following 方法, 在问题所给指标相容的情况下求得相应的输出反馈增益矩阵, 最后通过算法 2 求出元素绝对值和最小的增益矩阵, 即为我们所寻找的低成本控制。另外, 可以通过调节部分性能指标的限制范围来解决问题无解的情况, 这也为实际工程的应用提供了一定的参考。

注释及参考文献:

[1] Arash Hassibi, Jonathan How, Stephen Boyd. A path-following method for solving BMI problems in control. Proceedings of the American Control Conference. 1999, 1385-1389.
 [2] 王远钢, 郭治. 状态反馈中圆形极点与状态方差约束的相容性[J]. 自动化学报, 2001, 27(2): 207-213.
 [3] 李德权, 崔莉莉. 不确定系统具有圆形极点与方差约束的输出反馈鲁棒控制[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2004, 27(9): 1103-1106.

- [2]Hjalager A.Agricultural diversification into tourism [J].Tourism Management, 1996, 17(2):103-111.
- [3]Loumou A.Tourism contribution to agro-ecosystems conservation: The case of Lesbos Island, Greece[J].Environmental Management, 2000, 26(4):363-370.
- [4]Akpınar N.The Sustainable development about farm tourism [J].New Zealand Geographer, 2005, 36(2):79-84.
- [5]尹少华.乡村旅游及其发展对策的探讨[J].林业经济问题, 2001(5):264-267.
- [6]邹统钎.中国乡村旅游发展模式研究[J].旅游学刊, 2005(3):63-68.
- [7]戴斌.中国与国外乡村旅游发展模式比较研究[J].江西科技师范学院学报, 2006(1):16-23.
- [8]吴必虎.中国乡村旅游发展产业升级问题[J].旅游科学, 2007(3):11-13.
- [9]陈志永.利益相关者理论角度下乡村旅游发展模式研究[J].经济问题探索, 2008(7):106-114.
- [10]胡敏.我国乡村旅游专业合作组织的发展和转型[J].旅游学刊, 2009(2):70-74.
- [11]李俊峰.基于居民旅游消费偏好的郑州市乡村旅游开发策略探讨[J].安徽师范大学学报, 2010(6):576-580.
- [12]孟娇娇.乡村旅游发展动力机制研究[J].经济研究导刊, 2009(8):116.
- [13]杨玲玲,魏小安.旅游新业态的“新”意探析[J].资源与产业, 2009(6):136.

A Research on Development Mode of Country Tourism in China Based on Multi-Industry Linkage——A Case of Shuiji Town, Fujian Province

PENG Xia-sui, XU Yi-shan

(Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300)

Abstract: The development of country tourism has been rising promptly since 2000. Although many country tourism projects have been constructed in different areas, the current development mode of country tourism can not meet the needs in new era. Therefore, from the view of industrial chain and the analysis on dynamic mechanism of the sustainable development, we are proposing a new development mode——multi-industry linkage development mode of country tourism. The new mode is based on the analysis of existing tourism resource and market in Shuiji town, and the integration and optimization of industrial elements in and between different areas, aiming to consolidate the foundation of country tourism development and to promote the further economic development of country tourism in Shuiji town.

Key words: Country tourism; Multi-industry linkage; The development mode of industry; Shuiji town

(上接41页)

[4]A.Hassibi, J.How, S.Boyd. Low-authority controller design via convex optimization. In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, December 1998.

Low-cost Output-feedback Controller with Constraints of Pole and Output Variance

GENG Hong-mei

(Department of Liberal Arts, Yangzhou Polytechnic Institute, Yangzhou, Jiangsu 225127)

Abstract: The design problem is formulated in terms of BMI. By perturbation linearization of BMI, static output-feedback controller is designed to find low-cost output-feedback matrix with constraints on pole assignment and steady output variance, and an algorithm which can meet the requirements is proposed.

Key words: Static output-feedback control; Low-cost; Output variance; BMI; Path-following method