第27卷第4期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.27,NO.4
2013年12月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Dec.,2013

用积分因子解微分方程的意义分析

孙树东
（新疆警察学院,新疆 乌鲁木齐 830011）

【摘 要】文章介绍了积分因子求解微分方程,它是一种积极有效的方法。若是常见的微分方程,可通过分析观察来确定,较难的微分方程可以采用方程左侧分组,再分别找出每组的积分因子,这样可使问题简化。

【关键词】积分因子;全微分方程;意义分析
【中图分类号】O175 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2013)04-0015-02

1 全微分方程、积分因子

如果方程P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0的左边恰好是某一个函数u=u(x,y)的全微分,即du=Pdx+Qdy或$\frac{\partial u}{\partial x}=P$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$,那方程就叫全微分方程,此时,原方程的通解就是u(x,y)=c,这里的c是任意常数。要注意的是当P(x,y),Q(x,y)在某D上的单连通区域内它们具有一阶偏导数,那么可以知道当$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$时是判断全微分方程的充分且必要条件。这个等式在区域D上恒成立。也只有此条件成立时,根据曲线积分的原理可知,u(x,y)可以使用曲线积分表示。即可写成

$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$,这时的$x_0$, y_0是在D内选定任意点坐标。当坐标原点(0,0)在区域D时,也能取$u(x,y)=\int_0^1[xP(xt,yt)+yQ(xt,yt)]dt$,事实上它是沿联结坐标原点(0,0)到坐标点(x,y)的直线段的曲线积分。

例,微分方程$(3x^2y+2xy)dx+(x^3+x^2+2y)dy=0$,因为$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$,所以显然是全微分方程。则有

$u(x,y)=\int_0^1[x(3x^2yt^3+2xyt^2)+y(x^3t^3+x^2t^2+2yt)]dt$ $=x^3y+x^2y+y^2$可得所给微分方程的通解是$x^3y+x^2y+y^2=C$。

若方程P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0(1)不是全微分方程时,则存在不恒等于零的函数μ=μ(x,y),使得方程μPdx+μQdy=0成为全微分方程,那么μ(x,y)就叫做方程(1)的积分因子。例如,方程ydx−xdy=0不是全微分方程,但是,$\frac{1}{y^2}$是它的积分因子,因为在方程两边乘上$\frac{1}{y^2}$后,马上得全微分方程为

$\frac{ydx-xdy}{y^2}=0$。在理论上关于积分因子的存在性问题,已经得到解决,因此在这里不在进行论述。

2 微分方程引入积分因子

(1)简单的微分方程,我们可用 积分学中的凑微分这个有效的方法先寻找出积分因子。这时可以归纳一些简单的二元函数的全微分标准形式。并要求熟记,如。

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=d(\frac{x}{y}),\ \frac{xdy-ydx}{x^2}=d(\frac{y}{x})$$
$$\frac{ydx-xdy}{xy}=d(\ln\frac{x}{y}),\ \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d(\arctan\frac{x}{y})$$
$$\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}d(\ln\frac{x-y}{x+y})$$,ydx+xdy=d(xy)等等。例如,为了解微分方程$(y-x^2)dx-xdy=0$的通解,先将上式改写成$(ydx-xdy)-x^2dx=0$,然后方程两边乘以积分因子$\frac{1}{x^2}$,可得$\frac{ydx-xdy}{x^2}-dx=0$,也就是$d(\frac{y}{x})+dx=0$,成立。

上式积分之,便得原微分方程的通解为:$\frac{y}{x}+x=c$。

再如,若要求微分方程(x+2y)dx+xdy=0的通解,可以在方程两边乘以积分因子x,则有$x^2dx+2xydx+x^2dy=0$,这样即有$d(\frac{x^3}{3})+d(x^2y)=0$,然后积分得原方程通解为$\frac{x^3}{3}+x^2y=c$。

(2)若遇见较复杂的微分方程时,应该先把方程的左边分成几组,例如,把方程分成二组的情形下,有$(P_1dx+Q_1dy)+(P_2dx+Q_2dy)=0$,(2)随后,再分别找出两组的积分因子$\mu_1$和$\mu_2$,也就是说,存在函数$u_1=u_1(x,y)$和$u_2=u_2(x,y)$,使得,

$\mu_1P_1dx+\mu_1Q_1dy=d\mu_1$,

$\mu_2P_2dx+\mu_2Q_2dy=d\mu_2$。

再借助于μ_1和μ_2可以求微分方程(2)的积分因子。

因此,必须知道以下事实,如果μ是微分方程(1)的积分因子,也为

μPdx+μQdy=du,

则有μφ(u)也是方程(1)的积分因子,其中的φ(u)是u的任何连续函数。事实上就有,μφ(u)

收稿日期:2013-09-01
作者简介:孙树东(1958-),男,讲师,研究方向:高等数学理论及教学创新的研究。

$(Pdx+Qdy)=\varphi(u)(\mu Pdx+\mu Qdy)=\varphi(u)du=d\Phi(u)$。这里的$\Phi(u)$应该是$\varphi(u)$的一个原函数。

因此，从上面方程左端分成的二组的情形，我们可以选取更为适当的函数$\varphi(u)$和$\psi(u_2)$，可使$\mu=\mu_1\varphi_1(u_1)=\mu_2\psi_2(u_2)$，那么$\mu$应该同时是第一组和第二组的积分因子，所以不难看出$\mu$这个积分因子也应该是微分方程(2)的。

现在举出几个案例：

分析案例1 要求解微分方程$(xy^2+y)dx+xdy=0$的通解，首先把方程左边分解成$xy^2dx+(ydx+xdy)=0$也就是$xy^2dx+d(xy)=0$现在，$\mu_2=1$，$u_2=xy$，这样$\psi(xy)$是第二组的积分因子即可。

因此可取$\psi(xy)=\frac{1}{x^2y^2}$。在已给微分方程两边乘以$\frac{1}{x^2y^2}$，可得$\frac{dx}{x}+\frac{d(xy)}{x^2y^2}=0$，将它两边积分即得所给微分方程的通解为$\ln|x|-\frac{1}{xy}=c$。

分析案例2 为了解微分方程$(3xy^3-2y)dx+(x^2y^2+x)dy=0$的通解，可将它的左边分组成$(-2ydx+xdy)+(3xy^3dx+x^2y^2dy)=0$这样对于第一组$-2ydx+xdy$，乘以$\frac{1}{xy}$后，可得$-\frac{2dx}{x}+\frac{dy}{y}=d(\ln\frac{y}{x^2})$，因此说，第一组的积分因子的一般形式可以写为$\frac{1}{xy}\varphi(\frac{y}{x^2})$。而对第二组$3xy^3dx+x^2y^2dy$，乘以$\frac{1}{x^2y^3}$以后，

可得$\frac{3dx}{x}+\frac{dy}{y}=d\ln(x^3y)$，因而第二组的积分因子的一般形式应为$\frac{1}{x^2y^3}\psi(x^3y)$。而现在只要选择$\varphi(\frac{y}{x^2})=\frac{x^2}{y}$，$\psi(x^3y)=x^3y$，

就会有$\frac{1}{xy}\varphi(\frac{y}{x^2})=\frac{1}{x^2y^3}\psi(x^3y)=\frac{x}{y^2}$，可以看出这就是所求的积分因子。从而在所给微分方程两边同乘以因子$\frac{x}{y^2}$，可以得到$(-\frac{2x}{y}dx+\frac{x^2}{y^2}dy)+(3x^2ydx+x^3dy)=0$，即$d(-\frac{x^2}{y})+d(x^3y)=0$，则积分之后，得已给微分方程的通解为$x^3y-\frac{x^2}{y}=c$。

可以看出，使用积分因子是求解微分方程(1)的一种非常有效的方法，前面研究过的很多微分方程其实完全可以用这种方法求出它们的通解。已学习过的一阶线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，将他改写成$[P(x)y-Q(x)]dx+dy=0$，显然可知$\mu=e^{\int P(x)dx}$是原微分方程的积分因子，若在方程两边乘以$e^{\int P(x)dx}$以后，可以得到$d[ye^{\int P(x)dx}]-Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=0$，可知，一阶线性微分方程的通解就是$ye^{\int P(x)dx}-\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=c$，即有$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c]$。

注释及参考文献：

[1]汤光宋.常微分方程中积分因子的若干性质.[J].曲靖师范学院学报，1993(1)：22-23.

[2]苑金臣.用凑微分法解微分方程25例.[J].大学数学，2003(3)：15-17.

[3]叶桂芬.积分因子求法举例.[J].高等数学研究，2004(2)：44-45.

[4]于淑芬，求积分因子的简单方法.[J]工科数学，2008(4)：64-66.

Analysis the Significance of use Integrating Factor to Solve Differential Equation

SUN Shu-dong

(Xingjiang Police Academy, Urumqi, Xinjiang 830011)

Abstract: The article introduced to use integrating factor to solve differential equation, it is one positive effective method. If it is the common differential equation, may confirm by future analysis and monitoring, the more difficult ones we can use equation on the left side, and then find out the integrating factorof each group. Through this way, we can make the problem much easier.

Key words: Integrating factor; Total differential equation; Analysis of significance