

# 基于非线性偏微分方程的图像着色\*

宋晓刚, 李新路

(河南理工大学 数学与信息科学学院, 河南 焦作 454000)

**【摘要】**考虑到连通性原理和各向异性扩散,改进提出了新颖的非线性偏微分方程模型,改进的算法满足了视觉连通性原理,对图像中的细节也有较好的修复。

**【关键词】**非线性偏微分方程;图像着色;总变差;连通性

**【中图分类号】**TP391.41 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2012)03-0062-04

## 1 引言

数字图像修复是目前新颖而前沿的研究热点。图像修复的主要目的是恢复图像中缺失的信息,或者从图像中去除指定的物体和文字。基于偏微分方程的修复模型就是将图像修复过程转化为一系列的偏微分方程或能量泛函模型,从而通过数值迭代和智能优化的方法来处理图像。

基于偏微分方程的图像修复最早是由 Bertalmio 等人<sup>[1]</sup>提出,利用扩散方程将待修复区域外围的信息沿着等照度线方向向内传播,达到恢复丢失信息的目的。Tony chan 等人<sup>[2]</sup>建立了全变分(TV)修复模型,考虑到TV修复模型既不满足连通性原理,又不能平滑修复,故笔者改进提出了一个新的四阶非线性偏微分方程模型。改进算法在恢复效果和平滑扩散方面,相对于TV模型有了一定的改善并满足了视觉的连通性原理。

在本文中, $\Omega$ 表示整个图像区域, $D$ 表示信息丢失的待修补区域, $\Omega \setminus D$ 表示没有丢失信息的区域, $d^0$ 为 $\Omega \setminus D$ 上的可利用图像部分, $d$ 为修复后的图像。

## 2 新的图像修复模型

在图像的处理领域,一副图像通常被看做是定义在有界区域 $\Omega$ 的分段平滑函数,并在有界变差空间上对图像建模<sup>[3]</sup>,由于所提出的变分模型能够起到延长图像边缘的作用,从而非常适合于图像的修复。Tony chan 建立的全变分图像修补模型<sup>[2]</sup>为最小化后验能量:

$$E_{TV}[d \setminus d_0, D] = \int_{\Omega} |\nabla d| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (d - d_0) dx \quad (2.1)$$

其中, $\lambda$ 为拉格朗日乘数。根据变分原理,可求得与之对应的欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla d}{|\nabla d|} \right) + \lambda_D (d_0 - d) \quad (2.2)$$

其中 $\lambda_D(x) = \lambda \cdot I_{\Omega \setminus D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \setminus D \\ 0, & x \in D \end{cases}$ 。在 $d$ 变化较大的地方,扩散系数 $\frac{1}{|\nabla d|}$ 较小。

方法是最小化下列能量函数:

$$\min E[d, \lambda] = \int_{\Omega} (|\nabla d| + |\Delta d|) dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (d - d_0) dx \quad (2.3)$$

其中,欧几里得范数: $\Delta d = (|d_{xx}|^2 + |d_{xy}|^2 + |d_{yx}|^2 + |d_{yy}|^2)^{\frac{1}{2}}$ 。式(2.3)中每一项都有物理意义:第一项将待修复区域周围的图像信息平滑的传播,传播时的收敛速度用 $|\nabla d| + |\Delta d|$ 测量;第二项是在区域 $\Omega \setminus D$ 内确保 $d$ 接近 $d_0$ 。

为了利用泛函导数的定义得到式(2.3)的欧拉-拉格朗日方程,建立式(2.3)的欧拉-拉格朗日泛函:

$$L(d, \lambda) = \int_{\Omega} (|\nabla d| + |\Delta d|) dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (d - d_0) dx \quad (2.4)$$

计算式(2.4)的泛函导数 $\frac{\partial L}{\partial d}$ ,并设其值为零,有:

收稿日期:2012-06-22

\*基金项目:河南理工大学青年基金(项目编号:Q2009-23);河南理工大学运筹学与控制论重点学科资助。

作者简介:宋晓刚(1981-),男,河南滑县人,理学硕士,主要从事高等数学教学工作。

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial L}{\partial d} \cdot v \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(d + hv, \lambda) - L(d, \lambda)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\Omega} (\sqrt{(d_x + hv_x)^2 + (d_y + hv_y)^2} - \sqrt{d_x^2 + d_y^2}) dx \right. \\
 &\quad + \int_{\Omega} (\sqrt{|d_{xx} + hv_{xx}|^2 + |d_{xy} + hv_{xy}|^2 + |d_{yx} + hv_{yx}|^2 + |d_{yy} + hv_{yy}|^2} \\
 &\quad \quad \left. - \sqrt{|d_{xx}|^2 + |d_{xy}|^2 + |d_{yx}|^2 + |d_{yy}|^2}) dx \right) \\
 &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (2h(d - d_0)v + h^2v^2) dx
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中  $v \in BV(\Omega)$ 。对式(2.5)两次微分,并令

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \sqrt{|d_{xx} + hv_{xx}|^2 + |d_{xy} + hv_{xy}|^2 + |d_{yx} + hv_{yx}|^2 + |d_{yy} + hv_{yy}|^2} \\
 \Psi &= \sqrt{|d_{xx}|^2 + |d_{xy}|^2 + |d_{yx}|^2 + |d_{yy}|^2}
 \end{aligned}$$

第一项和第二项分别可化为:

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{(d_x + hv_x)^2 + (d_y + hv_y)^2} - \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \\
 &= \frac{(d_x + hv_x)^2 + (d_y + hv_y)^2 - d_x^2 - d_y^2}{\sqrt{(d_x + hv_x)^2 + (d_y + hv_y)^2} + \sqrt{d_x^2 + d_y^2}} \\
 &= \frac{2h(d_x v_x + d_y v_y) + h^2(v_x^2 + v_y^2)}{\sqrt{(d_x + hv_x)^2 + (d_y + hv_y)^2} + \sqrt{d_x^2 + d_y^2}}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

和

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{|d_{xx} + hv_{xx}|^2 + |d_{xy} + hv_{xy}|^2 + |d_{yx} + hv_{yx}|^2 + |d_{yy} + hv_{yy}|^2} \\
 &\quad - \sqrt{|d_{xx}|^2 + |d_{xy}|^2 + |d_{yx}|^2 + |d_{yy}|^2} \\
 &= \frac{2h(d_{xx}v_{xx} + d_{xy}v_{xy} + d_{yx}v_{yx} + d_{yy}v_{yy}) + h^2(v_{xx}^2 + v_{xy}^2 + v_{yx}^2 + v_{yy}^2)}{\Phi + \Psi}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

利用控制收敛定理,极限符合移到积分号里面,并设  $h \rightarrow 0$ , 有:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial L}{\partial d} \cdot v \\
 &= \int_{\Omega} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(d_x v_x + d_y v_y) + h(v_x^2 + v_y^2)}{\sqrt{(d_x + hv_x)^2 + (d_y + hv_y)^2} + \sqrt{d_x^2 + d_y^2}} \right) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(d_{xx}v_{xx} + d_{xy}v_{xy} + d_{yx}v_{yx} + d_{yy}v_{yy}) + h(v_{xx}^2 + v_{xy}^2 + v_{yx}^2 + v_{yy}^2)}{\Phi + \Psi} \right) dx \\
 &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} \lim_{h \rightarrow 0} (2(d - d_0)v + hv^2) dx \\
 &= \int_{\Omega} \frac{d_x v_x + d_y v_y}{|\nabla d|} dx + \int_{\Omega} \frac{d_{xx}v_{xx} + d_{xy}v_{xy} + d_{yx}v_{yx} + d_{yy}v_{yy}}{|\Delta d|} dx + \lambda \int_{\Omega \setminus D} (d - d_0)v dx
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

对式(2.8)中的前两项分步积分<sup>[4]</sup>, 得出  $d$  满足下面的非线性偏微分方程:

$$\frac{d_{xx} + d_{yy}}{|\nabla d|} + \left( \frac{d_{xx}}{|\Delta d|} \right)_{xx} + \left( \frac{d_{xy}}{|\Delta d|} \right)_{yx} + \left( \frac{d_{yx}}{|\Delta d|} \right)_{xy} + \left( \frac{d_{yy}}{|\Delta d|} \right)_{yy} + \lambda_D (d - d_0) = 0 \tag{2.9}$$

其中  $\lambda_D = \begin{cases} \lambda, & \text{在 } \Omega \setminus D \text{ 中} \\ 0, & \text{在 } D \text{ 中} \end{cases}$ 。当  $|\nabla d|$  和  $|\Delta d|$  为零时, 方程(2.9)将不满足正则性。为了使方程满足正则

性, 使用正则性条件  $|\nabla d| = \sqrt{|\nabla d|^2} + \varepsilon, |\Delta d| = \sqrt{|\Delta d|^2} + \varepsilon$ , 所以修改后的方程为:

$$\frac{d_{xx} + d_{yy}}{\sqrt{|\nabla d|^2 + \varepsilon}} + \left(\frac{d_{xx}}{\sqrt{|\Delta d|^2 + \varepsilon}}\right)_{xx} + \left(\frac{d_{xy}}{\sqrt{|\Delta d|^2 + \varepsilon}}\right)_{yx} + \left(\frac{d_{yx}}{\sqrt{|\Delta d|^2 + \varepsilon}}\right)_{xy} + \left(\frac{d_{yy}}{\sqrt{|\Delta d|^2 + \varepsilon}}\right)_{yy} + \lambda_D(d - d_0) = 0 \tag{2.10}$$

引进时间t,利用最速下降法可得d为下列方程的稳定解<sup>[5]</sup>:

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \frac{d_{xx} + d_{yy}}{\sqrt{|\nabla d|^2 + \varepsilon}} + \left(\frac{d_{xx}}{\sqrt{|\Delta d|^2 + \varepsilon}}\right)_{xx} + \left(\frac{d_{xy}}{\sqrt{|\Delta d|^2 + \varepsilon}}\right)_{yx} + \left(\frac{d_{yx}}{\sqrt{|\Delta d|^2 + \varepsilon}}\right)_{xy} + \left(\frac{d_{yy}}{\sqrt{|\Delta d|^2 + \varepsilon}}\right)_{yy} + \lambda_D(d - d_0) \tag{2.11}$$

方程(2.11)即为改进的非线性偏微分方程,此方程修复模型能快速平滑修复并实现连通性原理。

### 3 新方法的数值实现。

图像是密度值为256 × 256的矩阵,其中每一个矩阵元素d<sub>ij</sub>对应着图像d(x,y)在点x=x<sub>i</sub>=ih,y=y<sub>j</sub>=jh的灰度值。其中h为空间尺度大小。设时间步长为Δt,笔者以d<sup>n</sup><sub>ij</sub>定义d(x<sub>i</sub>,y<sub>j</sub>,t<sub>n</sub>),其中t<sub>n</sub>=nΔt,d的变差依赖于尺度空间参数,即d<sub>ij</sub>在(x<sub>i</sub>,y<sub>j</sub>,t<sub>n</sub>)的计算用欧拉方法d<sub>t</sub> =  $\frac{d_{i,j}^{n+1} - d_{i,j}^n}{\Delta t}$ 。

用最速下降法有:

$$d^{(n+1)} = d^{(n)} + \Delta t \left[ \frac{d_{xx}^{(n)} + d_{yy}^{(n)}}{\sqrt{|\nabla d^{(n)}|^2 + \varepsilon}} + \left(\frac{d_{xx}^{(n)}}{\sqrt{|\Delta d^{(n)}|^2 + \varepsilon}}\right)_{xx} + \left(\frac{d_{xy}^{(n)}}{\sqrt{|\Delta d^{(n)}|^2 + \varepsilon}}\right)_{yx} + \left(\frac{d_{yx}^{(n)}}{\sqrt{|\Delta d^{(n)}|^2 + \varepsilon}}\right)_{xy} + \left(\frac{d_{yy}^{(n)}}{\sqrt{|\Delta d^{(n)}|^2 + \varepsilon}}\right)_{yy} \right] \tag{3.1}$$

利用前项差分,后项差分,中心差分<sup>[5]</sup>以及单调中心斜极限方法<sup>[6]</sup>,详述式(3.1)的离散化,当然,一些其他的方法也比较好<sup>[7,8]</sup>。

分别用F,B,C分别表示前项差分,后项差分和中心差分,则有

$$d^{(n+1)} = d^{(n)} + \Delta t \left[ B_x \left( \frac{F_x d_{i,j}^{(n)}}{\sqrt{(F_x d_{i,j}^{(n)})^2 + (\frac{1}{2} C_y d_{i,j}^{(n)} + \frac{1}{2} C_y d_{i+1,j}^{(n)})^2 + \varepsilon}} \right) + B_y \left( \frac{F_y d_{i,j}^{(n)}}{\sqrt{(F_x d_{i,j}^{(n)})^2 + (\frac{1}{2} C_y d_{i,j}^{(n)} + \frac{1}{2} C_y d_{i+1,j}^{(n)})^2 + \varepsilon}} \right) + (G_{xx}(G(d_{i,j}^{(n)})G_{xx}(d_{i,j}^{(n)})) + G_{xy}(G(d_{i,j}^{(n)})G_{yx}(d_{i,j}^{(n)})) + G_{yx}(G(d_{i,j}^{(n)})G_{xy}(d_{i,j}^{(n)})) + G_{yy}(G(d_{i,j}^{(n)})G_{yy}(d_{i,j}^{(n)}))) \right] \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned} F_x d_{i,j} &= d_{i+1,j} - d_{i,j} & G_{xx}(d_{i,j}) &= d_{i+1,j} + d_{i-1,j} - 2d_{i,j} \\ F_y d_{i,j} &= d_{i,j+1} - d_{i,j} & G_{yy}(d_{i,j}) &= d_{i,j+1} + d_{i,j-1} - 2d_{i,j} \\ B_x d_{i,j} &= d_{i,j} - d_{i-1,j} & G_{xy}(d_{i,j}) &= d_{i+1,j} - d_{i,j} - d_{i+1,j-1} + d_{i,j-1} \\ B_y d_{i,j} &= d_{i,j} - d_{i,j-1} & G_{yx}(d_{i,j}) &= d_{i,j+1} - d_{i,j} - d_{i-1,j} + d_{i-1,j-1} \\ C_x d_{i,j} &= \frac{d_{i+k,j} - d_{i-1,j}}{2} & G(d_{i,j}) &= \sqrt{|G_{xx}(d_{i,j})|^2 + |G_{xy}(d_{i,j})|^2 + |G_{yx}(d_{i,j})|^2 + |G_{yy}(d_{i,j})|^2 + \varepsilon} \\ C_y d_{i,j} &= \frac{d_{i,j+1} - d_{i,j-1}}{2} \end{aligned}$$

所有的图像在[0,255]之间,时间步长为0.1,并且几百次迭代后就收敛,但是收敛速度依赖于修复区域D的大小。

### 4 数值实现的例子

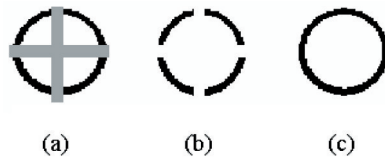


图1 修复一个被十字架损坏的圆环

图1通过修复一个被十字架损坏的圆环(a)展示了方程的强连通性。TV修复模型的结果是四个分离的圆弧(b),结果是不连通的,不能实现平滑修复。方程实现了期望的较好的结果,得到右边这个圆环(c)。



图2 满足连通性的例子

图2修复被损坏的反之字形带状区域的中间部分,其最后的结果满足连通性原理,但由于差值方法的缺陷,修复后的图像有一些锯齿。(a)是原始图像,(b)是新方程迭代800次的结果,(c)新方程迭代8000次的结果,(d)是最后的结果。

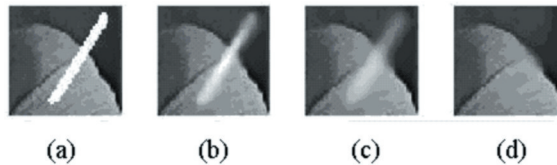


图3 修复 lena 帽子上的白条

图3显示了 lena 帽子上的白条被修复,帽子中间的凸圈显示有立体感,修复结果不是很好,迭代几万次后结果也许会比较满意。(a)是原图,(b)是新方程迭代1800次的结果。(c)是新方程迭代18000次的结果,(d)是最后的结果。

#### 注释及参考文献:

- [1] Bertalmio M, Sapiro G, Gaselles V, and Ballester C. Image inpainting. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH 2000[M]. New York: ACM Press, 2000: 417-424.
- [2] Chan T F and Shen J H. Mathematical Models for Local Non-Texture Inpainting[J]. SIAM J. APPL. Math, 2001, 62(3): 1019-1043.
- [3] Rudin L, Osher S, and Fatemi E, Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Journal, Physics D. 1992, 60: 259-268.
- [4] Osher S, The Level Set Method: Applications to Imaging Science[EB/OL]. www.edu/pub/camreport/cam0243.ps.gz.
- [5] B. Van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme[J]. J. Comput. Phys. 1997, 2(135): 229-248.
- [6] Randi Holm. Image inpainting using Nonlinear partial Differential Equations[EB/OL]. <http://www.prenhall.com/gonzalezwoods>.
- [7] Osher S. and Sethian J. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Comput. Phys. 1988, 79: 12-49.
- [8] Hoffman J. Numerical Methods for Engineers and Scientists[M]. New York: Mc Graw-Hill, 2004.

## Image Inpainting Based on the Nonlinear Partial Differential Equations

SONG Xiao-gang, LI Xin-lu

(School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454000)

**Abstract:** Guided by the connectivity principle and the anisotropic diffusion principle, we put forward a novel nonlinear PDE inpainting model that can ensure good visual connectivity and smooth of inpainting.

**Key words:** Nonlinear partial differential equations; Image inpainting; Total variation model; Connectivity