一个与黄金分割有密切联系的电路

方志聪
(西昌学院,四川 西昌 615013)

【摘　要】无限梯形电路的形式及其等效电阻的表示式简洁而优美,该电路的等效电阻、电压分配、电流分配都与黄金分割有密切联系,体现了数之美,源于现实之美。

【关键词】黄金分割;无限;梯形;电路
【中图分类号】O453　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2012)03-0036-03

黄金分割是指将整体分为两部分,较大部分与整体之比等于较小部分与较大部分之比,其比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$,或整体与较大部分之比等于较大部分与较小部分与之比,其比值则为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618$。

一线段的黄金分割点是设一条线段AB的长度为a,C点在靠近B点的黄金分割点上,且AC为b(较长部分),则:

因为:$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$

即:$\frac{b}{a}=\frac{a-b}{b}$

所以:$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$

0.618被认为是最具审美意义的比例数字,与生活、美学、自然等有广泛的联系,在数学领域,它与斐波纳契数列、无穷连分数等有着迷人的联系。

1 无限梯形电路与黄金分割

无限梯形电路是一个与黄金分割有着迷人联系的电路。

如图1所示无限梯形电路[1],设连接的电阻均为R。该电路是由无限多个完全相同的电路单元(1342之间的电路单元)级联而成,因而12两端可看成是一个电路单元与一个完全相同的无限梯形电路相连接,则12两端的等效电阻 R_{12} 与34两端的等效电阻 R_{34} 相同,以此类推,也与56两端的等效电阻 R_{56} 相同,即 $R_{12}=R_{34}=R_{56}=\cdots\cdots$,故等效电路如图2所示。

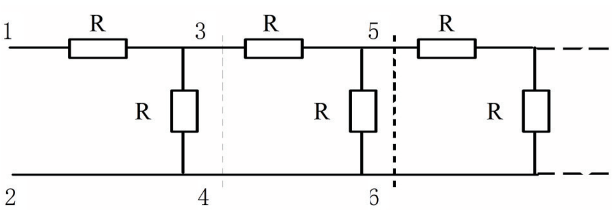

图1　无限梯形电路

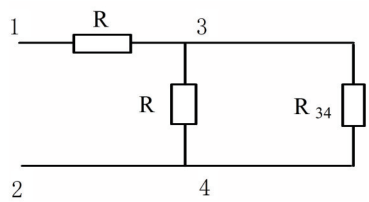

图2　等效电路

故有:$R_{12}=R+R//R_{34}$　　(1)

而:$R_{12}=R_{34}$

所以:$R_{12}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$　　(2)

类似有另一个电路,如图3所示的无限梯形电路,根据同样的道理,它的等效电路如图4所示。

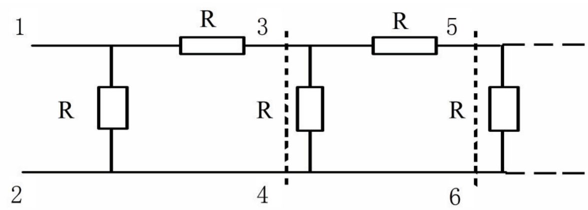

图3　无限梯形电路二

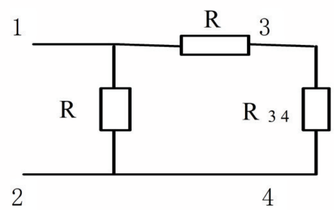

图4　等效电路二

故有:$R_{12}=R//(R+R_{34})$　　(3)

而:$R_{12}=R_{34}$

所以:$R_{12}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$　　(4)

从电路的等效电阻来看,两个电路与黄金分割有着迷人的联系。

2 无限梯形电路的美

再来看看等效电阻的表示式,对图1有:

$$R_{12}=R+\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_{34}}}$$

收稿日期:2012-07-10
作者简介:方志聪(1965-　),男,四川西昌人,硕士,副教授,主要从事基础物理教学。

$$= R + \cfrac{1}{R^{-1} + \cfrac{1}{R + \cfrac{1}{R^{-1} + \cfrac{1}{R_{56}}}}}$$

$$= R + \frac{1}{R^{-1} +}\frac{1}{R +}\frac{1}{R^{-1} +}\cdots \tag{5}$$

对图3有:

$$R_{12} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R + R_{34}}}$$

$$= \cfrac{1}{R^{-1} + \cfrac{1}{R + \cfrac{1}{R^{-1} + \cfrac{1}{R + R_{56}}}}}$$

$$= \frac{1}{R^{-1} +}\frac{1}{R +}\frac{1}{R^{-1} +}\frac{1}{R +}\cdots \tag{6}$$

由电路图和(5)、(6)式可见,电路本身是相同单元级联而成,是有规律的循环连接,等效电阻表示式(5)、(6)式是循环连分数,是有规律的循环关系,电路的形式和电路的等效电阻表示式简洁而优美,而等效电阻值(或比值)包含了黄金分割数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$或$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,亦简洁而优美,这正是“哪里有数,哪里就有美”,而数源于客观现实,数之美,源于现实(这里是电路)之美。而$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$或$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$是无理数,是无限不循环小数,这循环与不循环,看似矛盾,实则对立又统一,自然界充满着辩证关系。其实,无理数是和无限连分数相联系的,因而这两个电路的等效电阻表示式当然也就能表示为无限连分数。

3 电压、电流的黄金分配

对于黄金分割数,若是较大部分与整体之比,则其比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$,若是整体与较大部分之比,则其比值为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618$。

对于图1所示电路,如果将等效电阻视为整体,第一个串联电阻R视为部分(其余是较小部分),则对于图1电路,由(2)式有:

$$\frac{R_{12}}{R} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

这与整体与较大部分之比为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$相符。

而对于图3电路,如果将等效电阻视为“整体”,第一个并联的电阻R视为部分(其余也是部分),则对于图3电路,由(4)式有:

$$\frac{R_{12}}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

这是整体与部分之比,按常理,无论是较大部分或较小部分,部分都应小于整体,故比值应大于1,这里却小于1,在这里是“整体”小于部分。但从图4可知,R_{34}和R相串联,R_{34}是该部分的部分,而$R_{12}=R_{34}$,它又与整体相等,由此可见,“整体”与部分是相对的,这充满着辩证的哲理。

实际上,这里说的“整体”是电路的等效电阻,而我们知道,等效电阻是大于还是小于电路中的其它电阻,取决于各电阻的连接方式,这是毋庸置疑的,此乃“等效”的内涵。当然,对于电压、电流的分配,总电压、总电流一定大于电路各部分分配的电压或电流,这是因为能量要守恒,这由下面对电压、电流的分配的讨论就可看出。

3.1 电压的分配

对于图2电路,若12两端加上总电压U,第一个串联的电阻R上的电压U_{13},R_{34}的电压为U_{34},则:

$$\frac{U}{U_{13}} = \frac{U_{13}}{U_{34}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

而对于图4电路,若12两端加上总电压U,并联支路中,第一个串联的电阻R上的电压U_{13},R_{34}的电压为U_{34},同样有:

$$\frac{U}{U_{13}} = \frac{U_{13}}{U_{34}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

总电压U是整体,与整体与较大部分之比为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$相符。

3.2 电流的分配

对于图2电路,总电流为I,流过并联的电阻R上的电流为I_1,流过并联的R_{34}的电流为I_{34},则:

$$\frac{I}{I_1} = \frac{I_1}{I_{34}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

而对于图4电路,总电流为I,流过并联的电阻R上的电流为I_1,流过R_{34}的电流为I_{34},同样是:

$$\frac{I}{I_1} = \frac{I_1}{I_{34}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

总电流I为整体,也与整体与较大部分之比为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$相符。

对两个电路而言,从电压、电流的分配来看,整体与较大部分之比是一致的,这与等效电阻这个“整体”未必大于电路内部的其它电阻不同,但都与黄金分割有关。

无限梯形电路是一个形式上比较简单的电路,但它与黄金分割有着迷人的联系,因而也就与无限

连分数有密切联系，也蕴含着循环与不循环，“整体”与部分的辩证关系。

4 无限梯形电路与无理数的联系

当电路中串联和并联的电阻取不同值时，电路的等效电阻值可能是其它无理数如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$等的某种表示。而$\sqrt{2}$、π、e这三个无理数又可以统一在一个解析表达式中[2]，也就是说，$\sqrt{2}$、π、e这三个无理数是有密切关系的，因此，无限梯形电路与$\sqrt{2}$、π、e、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$等众多无理数有密切联系。

数源于客观现实，现实世界是数学的无限原型，一个如此简单的电路的等效电阻竟与无理数有着如此广泛的联系，这值得我们深思和进一步研究。

注释及参考文献：

[1]郭木森.电工学[M]第二版.北京：高等教育出版社，1987.10：50.
[2]周建勋，徐沥泉.数律条条美绝伦[J].数学通报，2003(7)：39-43.

A Circuit Closely Related to the Golden Section

FANG Zhi-cong
(Xichang College，Xichang，Sichuan 615013)

Abstract: The infinite ladder circuit form and its equivalent resistance expression are concise and graceful；its equivalent resistance，voltage and current assignment are closely connected with the golden section，which reflects the charming of number and the beauty of reality.

Key words: The golden section；Infinite；Ladder；Circuit

（上接35页）

cancer cell line[J].Biochemical and Biophysical Research Communications，2005，333(3)：763-767.
[19]SINHA R K，KOMENDA J，KNOPPOVA J，et al.Small CAB-like proteins prevent formation of singlet oxygen in the damaged photosystem II complex of the cyanobacterium Synechocystis sp PCC 6803[J].Plant Cell and Environment，2012，35(4)：806-818.

Application in Detection of Singlet Oxygen by a Novel Fluorescent Probe

LIN Li-sheng
(College of Photonic and Electronic Engineering，Fujian Normal University，Fuzhou，Fujian 350007)

Abstract: Singlet oxygen is an important kind of reactive oxygen species. It is important in fields that range from materials science to biology and medicine. In this paper，the spectral characteristics and principles of detection of singlet oxygen for a novel fluorescent probe(Singlet Oxygen Sensor Green reagent，SOSG)were summarized，and the state in application for detection of singlet oxygen was also reviewed. Finally，the developing tendency of the SOSG was analyzed briefly.

Key words: Singlet oxygen；Fluorescent probe；Spectral characteristic；Fluorescence imaging