一类四阶具有p-Laplacian算子微分方程周期解的存在性*

徐建中[1],周宗福[2]

(1.亳州师范高等专科学校 数学系,安徽 亳州 236800;2.安徽大学 数学科学学院,安徽 合肥 230039)

【摘　要】本文主要利用Mawhin连续性定理,讨论了一类四阶带有变时滞的p-Lapcaian型泛函微分方程:

$(\varphi_p(x''(t)))''+f(x'(t))+\beta(t)g(t,x(t),x(t-\tau(t)),x'(t))=e(t)$ 周期解的存在性,得到了方程周期解存在性的相关结论。这与已有的文献的结果不同,所考虑的方程更一般,从而所得的结果就更有广泛的意义。

【关键词】p-Lapcaian;周期解;Mawhin连续性定理;时滞

【中图分类号】O175.3 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2012)03-0027-06

引言

泛函微分方程周期解问题在生物数学、传染动力学、种群生态学、流体力学及非线弹性力学方面都有广泛的应用,并取得很多有用的研究成果。近年来,许多专家学者都致力于周期解问题的研究。在文[1]中,Lu研究了方程:

$$(\varphi_p(x'(t)))'=f(x(t))x'(t)+h(x(t))+g(x(t-\tau(t)))+e(t) \tag{1}$$

的周期解的存在性。文[2]中,Lu研究了下述Rayleigh方程周期解问题:

$$(\varphi_p(x''(t)))'+f(x'(t))+g(x(t-\tau(t)))=e(t) \tag{2}$$

文[3]研究了一类Li é nard方程:

$$(\varphi_p(x'(t)))'+f(t,x(t))x'(t)+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=e(t) \tag{3}$$

周期解的存在性。但是据目前的文献来看,研究一类四阶带有p-Laplacin算子Rayleigh型微分方程周期解的存在性的文章基本很少。受上述文献的启发,本章研究一类四阶具有p-Laplacin算子Rayleigh型微分方程:

$$(\varphi_p(x''(t)))''+f(x'(t))+\beta(t)g(t,x(t),x(t-\tau(t)),x'(t))=e(t) \tag{4}$$

周期解的存在性问题,这里p>1是一个常数 $\varphi_p:R\to R$, $\varphi_p(u)=|u|^{p-2}u$, β, τ, e∈C(R,R)且为T周期函数,β(t)≠0,f∈C(R,R),g∈C(R^4,R)且g(t+T,x,y,z)=g(t,x,y,z)。

1 预备知识及相关引理

为了应用Mawhin连续性定理研究方程(4)的周期解,笔者将方程改写为以下形式:

$$\begin{cases} x_1''(t)=\varphi_q(x_2(t))) \\ x_2'(t)=-f(x_1'(t))-\beta(t)g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)),x_1'(t))+e(t) \end{cases} \tag{5}$$

其中p>1,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。显然若x(t)=$(x_1(t),x_2(t))^T$是方程(5)的解,则$x_1(t)$必然为方程(4)的解。因此要找方程(4)的T周期解,问题就转换为方程(5)的T周期解。

令:$C_T\{y\in C(R,R):\varphi(t+T)\equiv\varphi(t)\}$,定义范数$|\varphi|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|\varphi(t)|$;

令:$C_T^1\{y\in C'(R,R):\varphi(t+T)\equiv\varphi(t)\}$,定义范数$\|\varphi\|=\max\{|\varphi|_0,|\varphi'|_0\}$;

$X=\{x=(x_1(\cdot),x_2(\cdot))^T\in C^1(R,R^2):x_1,x_2\in C_T^1\}$,定义$\|x\|_X=\max\{\|x_1\|,\|x_2\|\}$;

$Y=\{x=(x_1(\cdot),x_2(\cdot))^T\in C(R,R^2):x_1,x_2\in C_T\}$,定义$\|x\|_Y=\max\{|x_1|_0,|x_2|_0\}$;

显然X和Y是Banach空间。

定义:

$L:Dom(L)=\{x(\cdot)=(x_1(\cdot),x_1(\cdot))^T\in C^2(R,R^2):x(t+T)\equiv x(t)\}\subset X\to Y$,

收稿日期:2012-06-07

*基金项目:国家自然科学基金项目(项目编号:10771001);安徽省教育厅重点项目(项目编号:KJ2009A005Z,KJ2010ZD02);安徽省教育厅自然科学基金项目(项目编号:KJ2010B124);亳州师专数学教育省级特色专业,亳州师专科研项目(项目编号:BSKY201111,BSKY201113,BSKY201211)专项资金资助。

作者简介:徐建中(1979-),男,安徽庐江人,讲师,硕士,主要从事微分方程方面的研究。

$$Lx = x'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$N: X \to Y, Nx = \begin{pmatrix} |x_2(t)|^{q-2} x_2(t) \\ -f(x_1'(t)) - \beta(t) g(t, x_1(t), x_1(t-\tau(t)), x_1'(t)) + e(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

那么方程(4)转化为抽象方程LX=NX。易见KerL=R^2。因此L是一个指数为0的Fredholm算子。

作映射P:X→KerL,Q:Y→ImQ,

分别定义为P(x)=x(0),$Qy = \int_0^T y(s)ds$

令K为L｜$_{\text{Kerp}\cap\text{DomL}}$的逆算子,易见:

KerL=ImQ=R^2,$[Ky](t) = \int_0^T G(t,s)y(s)ds$

其中$G(t,s) = \begin{cases} \frac{s(t-T)}{T}, 0 \le s \le t \le T \\ \frac{t(s-T)}{T}, 0 \le t \le s \le T \end{cases}$

引理1[4] 若X,Y是两个Banach空间,L是一个指数为0的Fredholm算子,且Ω⊂X是一个有界开集,假设下列条件满足:

(1)$Lx \ne \lambda Nx, \forall x \in \partial\Omega \cap DomL, \lambda \in (0,1)$

(2)$Nx \notin \mathrm{Im}\, L, \forall x \in \partial\Omega \cap \ker L$

(3)$\deg\{JQN, \Omega \cap \ker L, 0\} \ne 0$

其中J:ImQ→KerL为同构映射,则方程Lx=Nx在Ω∩ DomL上至少有一个解。

为了应用方便,定义$\beta_1 = \max_{t\in[0,T]}|\beta(t)|$, $\beta_2 = \min_{t\in[0,T]}|\beta(t)|$, 并作以下假设:

[H_1]存在非负数a,b,c,d,使得:$|g(t,x,y,z)| \le a|x|^{p-1} + b|y|^{p-1} + c|z|^{p-1} + d$

$\forall(t,x,y,z) \in [0,T]\times R^3$

[H_2]存在A>0,使得:

$$g(t,x,y,z) < -\frac{|e|_0 + |f(z)|}{\beta_2}, \forall(t,x,y,z)\in[0,T]\times R^3, x<-A, y<-A$$

$$g(t,x,y,z) > -\frac{|e|_0 + |f(z)|}{\beta_2}, \forall(t,x,y,z)\in[0,T]\times R^3, x>A, y>A$$

[H_3]存在r>0,使得:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{|f(u)|}{|u|^{p-1}} \le r$$

[H_4] $e(t) - \beta(t) g(t,c,c,0) \ne f(0), \forall t \in [0,T], \forall c \in R$

2 主要结果

定理1若[H_1]~[H_4]成立,且

$$\left[(r+\beta_1 c+\beta_1 b(4\delta)^{\frac{p}{q}})\frac{T}{4\pi_p}+(4^{\frac{p}{q}}\beta_1 b+\beta_1 a\delta)(\frac{2T}{\pi_p})^p\right]<1$$

则方程(4)至少有一个T周期解,这里

$$\pi_p = \frac{2\pi(p-1)}{p\sin(\frac{\pi}{p})}, \delta = \max_{t\in[0,T]}|\tau(t)|$$

证明:考虑辅助方程:Lx=λNx,λ∈(0,1)。令

Ω_1={x∈Dom(L)⊂X:Lx=λNx,λ∈(0,1)}

记x(t)=(x_1(t),$x(t)_2$)^T,则:

$$\begin{cases} x_1''(t) = \lambda\varphi_q(x_2(t)) \\ x_2''(t) = -\lambda f(x_1'(t)) - \lambda\beta(t) g(t, x_1(t), x_1(t-\tau(t)), x_1'(t)) + \lambda e(t) \end{cases} \tag{8}$$

可以证明存在一个$t_0\in R$,使得:

$$|x_1(t_0)|\leqslant A \tag{9}$$

事实上,令t_1是$x_2(t)$在R上的最大值,则有:

$$x_2(t_1)=\max_{t\in R}x_2(t)=\max_{t\in[0,T]}x_2(t) \tag{10}$$

则有:$x_2'(t_1)=0$,$x_2''(t_1)\le 0$

由(10)及(8)的第二式,可得:

$$-\lambda f(x_1'(t_1))-\lambda\beta(t_1)g(t_1,x(t_1),x_1(t_1-\tau(t_1)),x_1'(t_1))+\lambda e(t_1)\le 0$$

由$\beta(t)\neq 0$,$t\in[0,T]$,根据连续函数性质,$\beta(t)$在$[0,T]$上不改变符号,且设$\beta(t)>0$,不失一般性,假设:

$$g(t_1,x(t_1),x_1(t_1-\tau(t_1)),x_1'(t_1))\ge\frac{e(t)-f(x_1'(t_1))}{\beta(t_1)}\ge-\frac{|e|_0+|f(x_1'(t_1))|}{\beta} \tag{11}$$

由(H_2)可得:

$$x_1(t_1)\geqslant -A\text{或}x_1(t_1-\tau(t_1))\geqslant -A \tag{12}$$

同样地,若t_2是$x(t_2)$的最小值点,则有:

$$x_1(t_2)\leqslant A\text{或}x_1(t_2-\tau(t_2))\leqslant A \tag{13}$$

若$x_1(t_1)\geqslant -A$,那么:

(I):若$x_1(t_1)\leqslant A$,令$t_0=t_1$,则:$|x_1(t_0)|\leqslant A$

(II):若$x_1(t_1)>A$,由(13)及$x(t)$的连续性,必存在常数t_0在t_1和t_2之间或者在t_1和$t_2-\tau(t_2)$之间使得$|x_1(t_0)|<A$,也就证明了(9)式。

因此

$$\begin{aligned}|x_1|_0&=\max_{t\in[0,T]}|x_1(t_1)|=\max_{t\in[t_0,t_0+T]}|x_1(t)|\\&\le|x_1(t_0)|+\int_{t_0}^{t_0+T}|x_1'(t)|dt\le A+\int_0^T|x_1'(t)|dt\end{aligned} \tag{14}$$

将$x_2(t)=\varphi_p(\frac{1}{\lambda}x_1''(t))$代入(8)的第二式,得到:

$$\left[\varphi_p(\frac{1}{\lambda}x_1''(t))\right]''=-\lambda f(x_1'(t))-\lambda\beta(t)g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)),x_1'(t))+\lambda e(t)$$

$$\left[\varphi_p(\frac{1}{\lambda}x_1''(t))\right]''+\lambda f(x_1'(t))+\lambda\beta(t)g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)),x_1'(t))=\lambda e(t) \tag{15}$$

将(15)两边同乘以$x_1(t)$并从0到T积分,则有:

$$\begin{aligned}&\int_0^T\left[\varphi_p(\frac{1}{\lambda}x_1''(t))\right]''x_1(t)dt+\lambda^p\int_0^T f(x_1'(t))x_1(t)dt\\&\qquad+\lambda^p\int_0^T\beta(t)g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)),x_1'(t))x_1(t)dt\\&=\lambda^p\int_0^T e(t)x_1(t)dt\end{aligned} \tag{16}$$

将$\int_0^T\left[\varphi_p(\frac{1}{\lambda}x_1''(t))\right]''x_1(t)dt=\int_0^T|x_1''(t)|^p dt$代入(16)式,则有:

$$\begin{aligned}&\int_0^T|x_1''(t)|^p dt=-\lambda^p\int_0^T f(x_1'(t))x_1(t)dt\\&-\lambda^p\int_0^T\beta(t)g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)),x_1'(t))x_1(t)dt+\lambda^p\int_0^T e(t)x_1(t)dt\end{aligned} \tag{17}$$

由假设$\left[(r+\beta_1 c+\beta_1 b(4\delta)^{\frac{p}{q}})\frac{T}{4\pi_p}+(4^{\frac{p}{q}}\beta_1 b+\beta_1 a\delta)(\frac{2T}{\pi_p})^p\right]<1$,可知:

存在$\varepsilon_0>0$使得:

$$\left[(r+\varepsilon_0+\beta_1 c+\beta_1 b(4\delta)^{\frac{p}{q}})\frac{T}{\pi_p}+(4^{\frac{p}{q}}\beta_1 b+\beta_1 a\delta)(\frac{2T}{\pi_p})^p\right](\frac{T}{\pi_p})^p<1 \tag{18}$$

根据(H_3),存在 ρ >0,使得:

$|f(u)| \le (r+\varepsilon_0)|u|^{p-1}, \forall u \in R, |u| > \rho$

令:

$f_\rho = \max_{|u|<\rho} |f(u)|, E_1 = \{t \in [0,T]: |x_1'(t)| \le \rho\}, E_2 = \{t \in [0,T]: |x_1'(t)| > \rho\},$

则有:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |x_1''(t)|^p dt &\le (\int_{E_1} + \int_{E_2}) |f(x_1'(t))||x_1(t)| dt \\
&\quad + \beta_1 \int_0^T |g(t, x_1(t_1), x_1(t-\tau(t)), x_1'(t))| |x_1(t)| dt + \int_0^T |e(t)| |x_1(t)| dt \\
&\le f_\rho \int_0^T |x_1(t)| dt + (r+\varepsilon_0) \int_0^T |x_1'(t)|^{p-1} |x_1(t)| dt + \int_0^T |e(t)| |x_1(t)| dt \\
&\quad + \beta_1 \Big[a \int_0^T |x(t)|^p dt + b \int_0^T |x_1(t-\tau(t))|^{p-1} |x_1(t)| dt \\
&\quad + c \int_0^T |x_1'(t)|^{p-1} |x_1(t)| dt + d \int_0^T |x_1(t)|^p dt \Big] \\
&\le \Big[f_\rho T^{\frac{1}{q}} + \beta_1 d T^{\frac{1}{q}} + |e|_0 T^{\frac{1}{q}} \Big] (\int_0^T |x_1(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \Big[(r+\beta_1 c+\varepsilon_0)(\int_0^T |x_1'(t)|^p dt)^{\frac{1}{q}} + \beta_1 b (\int_0^T |x_1(t-\tau(t))|^p dt)^{\frac{1}{q}} \Big] \\
&\quad (\int_0^T |x_1(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} + \beta_1 a \int_0^T |x_1(t)|^p dt
\end{aligned} \tag{19}$$

由Taylor展开式,可知:

$$x_1(t-\tau(t)) = x_1(t) + x_1'(t-\tau(t)) + o(-\tau(t)) \tag{20}$$

所以 $\int_0^T |x_1(t-\tau(t))|^p dt \le 4^p \int_0^T |x_1(t)|^p dt + 4^p \delta^p \int_0^T |x_1'(t)|^p dt + 2^p \delta^p T$

即

$$\begin{aligned}
&(\int_0^T |x_1(t-\tau(t))|^p dt)^{\frac{1}{q}} \\
&\le 4^{\frac{p}{q}} (\int_0^T |x_1(t)|^p dt)^{\frac{1}{q}} + (4\delta)^{\frac{p}{q}} (\int_0^T |x_1'(t)|^p dt)^{\frac{1}{q}} + (2\delta)^{\frac{p}{q}} T^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{21}$$

将(21)式代入(19)式,则有:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |x_1''(t)|^p dt &\le \Big[f_p T^{\frac{1}{q}} + \beta_1 d T^{\frac{1}{q}} + |e|_0 T^{\frac{1}{q}} + \beta_1 b (2\delta)^{\frac{p}{q}} T^{\frac{1}{q}} \Big] (\int_0^T |x_1(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + (r_1 + \beta_1 c + \varepsilon_0 + \beta_1 b (4\delta)^{\frac{p}{q}})(\int_0^T |x_1'(t)|^p dt)^{\frac{1}{q}} (\int_0^T |x_1(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times (4^{\frac{p}{q}} \beta_1 b + \beta_1 a) \int_0^T |x_1(t)|^p dt
\end{aligned} \tag{22}$$

由文[5]有如下不等式:

$$\int_0^T |x_1'(t)|^p dt \le (\frac{T}{\pi_p}) \int_0^T |x_1''(t)|^p dt \tag{23}$$

其中$\pi_p = \dfrac{2\pi(P-1)^{\frac{1}{P}}}{p\sin(\frac{\pi}{p})}$。于是

$$(\int_0^T |x_1(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \le \frac{T}{\pi_p} (\int_0^T |x_1'(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} + A T^{\frac{1}{p}} \tag{24}$$

将(23),(24)代入(21),则有:

$$\int_0^T |x_1(t)|^p dt \le (\frac{T}{\pi_p})^p \int_0^T |x_1(t)|^p dt$$

$$\le (\frac{T}{\pi_p})^p\{T^{\frac{1}{q}}\left[f_\rho+\beta_1 d+|e|_0+\beta_1 b(2\delta)^{\frac{p}{q}}\right]\left[\frac{T}{\pi_p}(\int_0^T|x_1'(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}+AT^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$+(r+\beta_1 c+\varepsilon_0+\beta_1 b(4\delta)^{\frac{p}{q}})(\int_0^T|x_1'(t)|^p dt)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{T}{\pi_p}(\int_0^T|x_1'(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}+AT^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$+(4^{\frac{p}{q}}\beta_1 b+\beta_1 a)2^p\left[(\frac{T}{\pi_p})^p\int_0^T|x_1'(t)|^p dt+APT\right]\} \tag{25}$$

由(18)及p>1,则有:存在M_0>0,使得:$\int_0^T|x_1'(t)|^p dt\le M_0$

联立(14),则有$|x_1|_0\le A+\int_0^T|x_1'(t)|dt\le A+T^{\frac{1}{q}}M_0^{\frac{1}{p}}\overset{\Delta}{=}M_{11}$

利用Holder不定式可得:$\int_0^T|x_1'(t)|dt\le T^{\frac{1}{q}}(\int_0^T|x_1'(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}\le T^{\frac{1}{q}}M_0^{\frac{1}{p}}$

这就意味着∃M_{12}>0,使得:$|x_1'|_0\le M_{12}$。

由(8)式的第一式,则有:$\int_0^T|x_2'(t)|^{p-2}x_2(t)dt=0$。从而∃$t_3\in[0,T]$,使得:$x_2(t_3)=0$。因此$|x_2|_0\le\int_0^T|x_2'(t)|dt$,另一方面,由$x_2(0)=x_2(T)$,可知,存在$t_4\in[0,T]$使得$x'_2(t_4)=0$,则有:

$$\begin{aligned}|x_2'(t)|&\le\int_0^T|x_2''(t)|dt\\&\le\int_0^T|f(x_1'(t))|dt+\int_0^T|\beta(t)||g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)),x_1'(t)|dt+\int_0^T|e(t)|dt\\&\le f_M T+\beta_1 g_M+|e|_0 T\overset{\Delta}{=}M_{21}\end{aligned}$$

其中:$f_M=\max_{|z|\le M_{12}}|f(z)|$, $g_M=\max_{[0,T]\times[-M_{11},M_{11}]\times[-M_{11},M_{11}]\times[-M_{12},M_{12}]}|g(t,x,y,z)|$

因此$|x_2'|_0\le M_{21}$,则:$|x_2|_0\le M_{21}T\overset{\Delta}{=}M_{22}$。

令$\Omega_2=\{x\in\ker L:QNx=0\}$。若$x\in\Omega_2$,则:

$$\begin{cases}|x_2|^{q-2}x_2=0\\ \frac{1}{T}\int_0^T\left[f(0)+\beta(t)g(t,x_1,x_1,0)-e(t)\right]dt=0\end{cases}$$

显然x_2=0,再由(H_2)知$|x_1|_0\le A$,且有:$\Omega_2\subset\Omega_1$

令$\Omega=\{x=(x_1,x_2)^T\in X:\|x_1\|\le M_1+1,\|x_2\|\le M_2+1\}$

其中$M_1=\max\{M_{11},M_{12}\}$,$M_2=\max\{M_{21},M_{22}\}$,则有:$\Omega_2\cup\Omega_1\subset\Omega$,因此引理1的条件(1),(2)均能满足,剩下的就是要证明引理1的条件(3)满足。

令$J:\mathrm{Im}Q\to\ker L$,$J(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$

$\Delta_\varepsilon=\{x=(x_1,x_2)^T\in R^2:|x_1|<M_1,|x_2|<\varepsilon\}$

易见存在一个ε>0使得QNx=0在$\overline{(\Omega\cap\ker(L))\setminus\Delta_\varepsilon}$上无解。因此deg(JQN,Ω∩kerL,0)=deg(JQN,Δ_ε,0)。

$$令\ QN_0=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{T}\int_0^T\left[f(0)+\beta(t)g(t,x_1,x_1,0)-e(t)\right]dt\end{pmatrix},$$

若$x\in\partial\Delta_\varepsilon$,则$\|JQN(x)-JQN_0(x)\|\le\max_{|x_2|\le\varepsilon}\{\frac{1}{T}\int_0^T|\varphi_q(x_2)|dt\}$,即知当ε→0时,$\|JQN(x)-JQN_0(x)\|\to0$,故ε充分小时,deg(JQN,$\Delta_\varepsilon$,0)=deg($JQN_0$,$\Delta_\varepsilon$,0),则有:deg($JQN_0$,$\Delta_\varepsilon$,0)=deg($JQN_0$,$\Delta_0$,0),其中$\Delta_0=\{x\in R:|x|<M_1\}\subset R$,由($H_2$)知:deg($JQN_0$,$\Delta_0$,0)≠0,即:

deg(JQN,Ω∩kerL,0)=deg(JQN_0,Δ_0,0)≠0。

因此由引理1,Lx=Nx在$\overline{\Omega}$上有一个解:

$x^*(t)=(x_1^*(t),x_2^*(t))$

也即方程(4)有一个T周期解$x_1^*(t)$。证毕。

3 应用举例

考虑方程:

$$\left(\varphi_3(x_1''(t))\right)'' + f(x_1'(t)) + \frac{\cos^2 t+1}{27} g(t, x(t), x(t-\frac{\cos 2t}{9}), x_1'(t)) = \cos 2t \qquad (26)$$

这里，

$\forall$ t,x,y,z$\in$R, $f(z) = \frac{8z}{27\sqrt{1+|z|^{\frac{1}{3}}}}$, $g(t,x,y,z) = 9\sin 2t + \frac{4}{3}x|z| + \mathrm{sgn}(y)y^2$,

p=3, T=π, a=2, b=1, $c=\frac{2}{9}$, $\beta(t)=\frac{\cos^2 t+1}{27}$, $\beta_1=\frac{2}{27}$,

$\beta_2=\frac{1}{27}$, $\tau(t)=\frac{\cos 2t}{9}$, $\delta=\frac{1}{9}$, e(t)=cos2t, $|e|_0=1$, r=3, A=6

容易验证定理1中的(H_1)，(H_3)，(H_4)均能满足。

当t$\in$[0,T], x<−6, y<−6, z$\in$R时，

$$g(t,x,y,z) < 9 - 8|z| - 36 = -27(1+\frac{8|z|}{27}) < \frac{|e|_0 + |f(z)|}{\beta_2},$$

当t$\in$[0,T], x>6, y>6, z$\in$R时，

$$g(t,x,y,z) > \frac{|e|_0 + |f(z)|}{\beta_2}。$$

所以定理1中的(H_2)成立。

易见

$$\left[(r+\beta_1 c+\beta_1 b(4\delta)^{\frac{p}{q}})\frac{T}{\pi_p} + (4^{\frac{p}{q}}\beta_1 b+\beta_1 a)(\frac{2T}{\pi_p})^p\right](\frac{T}{\pi_p})^p < 1。$$

因此方程(26)满足定理1的所有条件，即知方程(26)存在一个π周期解。

注释及参考文献：

[1]Shiping Lu, Zhangjie Gui.On the existence of periodic to p−Laplancian Rayleigh differential equation with a delay[J].Math. Anal.Appl.325(2007):685−702.

[2]Shiping Lu, Exsitence of periodic solutions to Lapacian Li é nard differential equation with a deviating argument[EB/OL]. NonlinearAnal.(2007)doi:10.1016/j.na.2006 12 04.

[3]Wing−sun Chenug, On the existence of periodic solutions for p−Laplacian generalied Li é nard equation[J].Nonlinear Anal.60 (2005), 65−75.

[4]R.E.Gaines, J.Mawhin, Coincide degree and nonlinear differential equations, in: Lecture Notes in Math[J].Spring−Verlag, 1977(568).

[5]Jin Shan, Lu Shiping, Periodic solutions for a fourth−order p−Laplacian differential equation with a deviating argument[J]. Nonlinear Anal.69(2008):1710−1718.

[6]郭大钧.非线性泛函分析[M].济南:山东科学技术出版社,2001.

[7]郑祖庥.泛函微分方程理论[M].合肥:安徽教育出版社,1994.

[8]刘炳文,黄立宏,张正球.一类n阶非线性时滞微分方程周期解的存在性[J].数学物理学报,2007,27A(2):343−350.

Existence of Periodic Solutions for a Fourth-order p-Laplacian Differential Equation

XU Jian−zhong[1], ZHOU Zong−fu[2]

(1.Department of Mathematics, Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800;
2.School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei, Anhui 230039)

Abstract: In this paper, by means of Mawhin's continuation theorem, we study a kind of fourth−order p−Laplacian differential equation with delay as follows:

$$(\varphi_p(x''(t)))'' + f(x'(t)) + \beta(t)g(t, x(t), x(t-\tau(t)), x'(t)) = e(t)$$

A new result on the existence of periodic solution is obtained. Our results are different from the previous literatures, the equation considered is more general, which make the results have much more profound meaning.

Key words: P−Lapcaian; Periodic solution; Mawhin's continuation theorem; Delay