微积分在几何计算上的应用*

冯依虎,张宗标
(亳州师范高等专科学校,安徽 亳州 236800)

【摘　要】本文从三个方面入手,以微积分为工具,从简单的几何问题入手,逐层推进,由易到难,分别讨论了微积分在长度、面积、体积方面的应用,充分体现了微积分在几何计算上应用的广泛性、重要性。

【关键词】微积分;长度;面积;体积
【中图分类号】O172　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2012)02-0054-03

微积分作为一个数学分支决不只是一些基本概念的抽象总体,它更是一种很有用的计算工具,能够用来解决大量复杂的实际问题。

在中学数学里,我们学到了计算一些直线图形及圆面积的公式,但是实际问题中遇到的许多图形不会如此简单,那么如何来计算一个几何图形的面积、长度、体积呢? 用初等方法已经不够了,可以应用微元求和的方法进行几何计算[1]。

1 面积的计算

1.1 如何求平面图形的面积

举个具体例子,考虑抛物线 $y=x^2$,它的图形,如图1,在Ox轴上取一点C,设OC的长是1,作垂直于Ox轴的垂线AC,交抛物线于A,求曲边三角形OAC的面积。

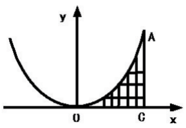

图1

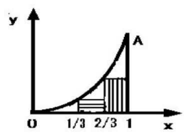

图2

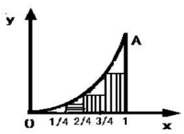

图3

①把区间[0,1]三等分,算出抛物线下面有斜线的矩形的面积的和,如图2所示:

$$S_3=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]=\frac{1}{3^2}\left[1+2^2\right]=\frac{5}{27}$$

这个数可以作为所求图形面积的一个粗略的近似值。

以直观上看来,这是个比 S_3 稍好的近似值。

②如果把[0,1]四等分,将画有斜线的三个矩形的面积加起来,得到(如图3)

$$S_4=\frac{1}{4^3}\left[1+2^2+3^2\right]=\frac{7}{32}$$

③继续这种作法,把区间[0,1]分成n等分,作出n-1个矩形,把它们的面积一一加起来,得到

$$S_n=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[1+2^2+\cdots(n-1)^2\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

如果n相当大时,趋向于+∞时

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

从上面的例子可以看出,具体的函数所表示的曲线与x轴之间的面积的计算,每一个这样的图形,实际上是曲边梯形。(如图5)当n无限增大时,最后都归结到求曲边梯形的面积的问题,解决这类问题的思想方法概括说来就是"分割,近似求和,取极值"[3]。如图4可得。

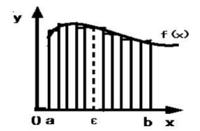

图4

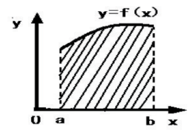

图5

把 $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$　　$\delta=\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i)\Delta x_i$

而 ε_i 就是小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中任一点,称和数为函数f(x)在区间[a,b]上的积分和。显然,这个和数既与分法T有关,又与 ε_i 的取法有关,但如果把小区间 $[x_{i-1},x_i]$(i=1,…,n)中最大的一个长度记作入λ(T),即令 $\lambda(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ 那么λ(T)→0时,这些不同的和都会趋向一个极限值I,这个值I就称为函数f(x)在区间[a,b]上的定积分,记作:

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

这就是平面上的由连续函数f(x)所围成的区域的图形的面积。

(1)由曲线y=f(x)(x≥0)与直线x=a,x=b,y=0所围成的曲边梯形的面积为:

$A=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx$,当y=f(x)在[a,b]上变

收稿日期:2012-03-22
*基金项目:本文受亳州师范高等专科学校省级特色专业数学教育、教科研课题(BSJKY0918)和(BSJKY0922)资助。
作者简介:冯依虎(1982-　),男,安徽潜山人,在读硕士,助教,研究方向:应用微分方程。

号时,显然有 $A=\int_a^b|f(x)|dx$,如图6[2]。

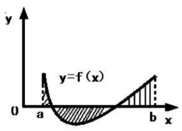

图6

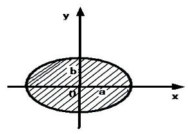

图7

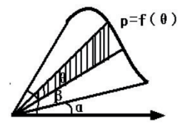

图8

(2)如果图形由封闭曲线所围成,如图6很容易知道它的面积为

$$A=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|dx$$

例1:计算椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的面积(如图7)

解:面积A为 $\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{-b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

$$=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt$$

$$=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\pi ab$$

(3)假如曲线是由极坐标方程给出 $\rho=f(\theta)$,$\alpha\leq\beta$,这时如何计算由曲线 $\rho=f(\theta)$及直线 $\theta=\alpha$,$\theta=\beta$ 所围成的曲边扇形的面积呢?(如图8)

由文献可知[5],半径为r,中心角为θ的圆扇形的面积为$\frac{1}{2}r^2\theta$,现在很多个小的圆扇形拼成的图形来近似所给的曲边扇形,将$[\alpha,\beta]$任意分成n份。

$$\alpha=\theta_0<\theta_1\cdots<\theta_{i-1}<\theta_i<\cdots<\theta_n=\beta$$

由射线 $\theta=\theta_{i-1}$,$\theta=\theta_i$及曲线 $\rho=f(\theta)$所围成的小扇形面积ΔA_i近似地等于$\frac{1}{2}f^2(\varepsilon_i)\Delta\theta_i$($\theta_{i-1}\leq\varepsilon_i\leq\theta_i$),因而面积A近似地等于$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\varepsilon_i)\Delta\theta_i$,命令$d=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta\theta_i\}$即得$A=\lim\limits_{d\to0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\varepsilon_i)\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)d\theta$

例2:计算双纽线 $\rho^2=a^2\cos2\theta$ 所围成的面积A。(如图9)

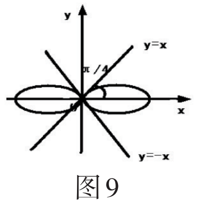

图9

解:由图形的对称性,可知

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^2d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta d\theta$$

$$=2a^2\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\ \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=a^2$$

以上为平面上区域的面积的计算方法,如果到了空间又是如何呢?在高中之前学习过球、圆锥、圆台、球冠等一些比较规则的圆形的面积,现在来看更一般的。

1.2 如何求空间旋转曲面的面积

(1)设L是xy平面上一条曲线,则L绕ox轴旋转所成旋转面面积为:

$$S_{ox}=2\pi\int_L|y|ds \quad ①$$

$$\text{而}\ ds=2\pi f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx \quad ②$$

由①②可以得到$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

(2)曲面域的面积

曲面域即曲面S上一个区域D,下面将推导其面积的计算公式。

设曲面S:$r=r(u,\nu)$,取以点(u,ν),$(u+du,r)$,$(u+du,\nu+d\nu)$,$(u,\nu+d\nu)$为顶点的曲边四边形。由于平行四边形的面积等于两边之积再乘以它们交角的正弦

$$d\sigma=|ru\times rv|dudv$$

$$\sigma\text{的面积}=\iint_D|r_u\times r_v|dudv$$

令$\left[r_u\times r_v\right]^2={r^2}_u{r^2}_v-(r_ur_v)^2=EG-F^2>0$

所以:σ的面积$=\iint_D\sqrt{EG-F^2}dudv$

这里只是直观地推导了曲面的面积公式,关于曲面面积概念的严格叙述与曲面面积公式的严格推导,可参看相关文献[2,4]。

1.3 由给定函数f(x,y),求曲面的面积

设D为可求面积的平面有界区域,函数$f(x,y)$在D上具有连续的一阶偏导数,讨论由方程$z=f(x,y)$ $(x,y)\in D$

由文献[3]可知

$$\Delta s=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}dxdy$$

$=\iint_D\frac{dxdy}{|\cos(n,z)|}$(其中$\cos(n,z)$为曲面的法向量与z轴正向夹角的余弦)

例3:求圆锥$z=\sqrt{x^2+y^2}$在圆柱体$x^2+y^2\leq x$内那一部分的面积。

解:据曲面面积公式(1)

$$\Delta S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

其中D是$x^2+y^2\leq x$,所求面积为$z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

因此,$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$

所以 $\Delta S=\iint_D\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\,\Delta D=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

2 长度的计算

中学学习过规则曲线的长度的计算,如果给出某一曲线的函数解析式和它的定义域,能否来计算它的长度呢? 由文献可知[3]。平面曲线的长度(曲线参数方程和直角坐标方程)。

(1)曲线由参数方程$x=\varphi(t)$,$y=\phi(t)$($\alpha\leqslant t\leqslant\beta$)

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}\,dt$$

(2)如果曲线由直角坐标方程$y=f(x)$($\alpha\leqslant x\leqslant b$)

$$S=\int_{a}^{b}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

根据上面的两个知识点举例如下[6]:

例4:一个半径为a的圆,在一条直线上滚动,圆周上一定点P描出一条多拱形的曲线,求它的一拱的长度,如图10。

解:设圆滚动时所沿的直线为x轴,取一拱开始点作为坐标轴原点,过拱上一点:P作PN垂直于x轴作PQ垂直于半径CN,取参数$t=\angle PCN$,于是$ON=PN=at$,从而可得一拱曲线的参数方程为

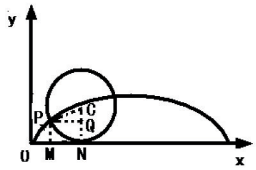

图10

$$\begin{cases}x=OM=ON-MN=at-a\sin t=a(t-\sin t)\\ y=PM=NC-QC=a-a\cos t=ac(1-\cos t)\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$$

由弧长公式可知

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=8a$$

例5:求抛物线$y=x^2$在点$O(0,0)$,$A(a,a^2)$之间的一段弧长。

解:由公式,弧长$\widehat{\Delta A}$等于

$$\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[2a\sqrt{1+4a^2}+\ln(2a+\sqrt{1+4a^2})\right]$$

上面是运用弧长公式来计算的两个例子。

3 体积的计算

我们还可联想到体积的计算方面,在初等几何里也同样只能计算规则图形的体积,而且是很简单,套用公式来计算:

由文献可知[5],

(1)由平行截面面积来求体积。

根据截面面积函数$A(x)$,$x\in[a,b]$,平行平面$x=a$,$x=b$来导出它的体积计算公式,实质是面积的求和的极限。

把$[a,b]$无限等分

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

(2)旋转体体积的计算

f是$[a,b]$上的连续函数,Ω是由平面图形$0\leqslant|y|\leqslant f(x)|$ $a\leqslant x\leqslant b$

绕x轴旋转一周所得的旋转体,那么易知截面面积函数为

$A(x)\pi[f(x)]^2$ $x\in[a,b]$

由公式可知,旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$$

(3)现在讨论更一般的情况下求体积。

以一般情况下用二重积分在极坐标系下化为累次积分计算:

(i)若原点$0\in D$,且xy平面上射线θ=常数与D的边界至多交于两点,且Δ必可表示成$r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$ $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$于是有

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$$

类似地,若xy平面上的圆r=常数与D的边界至少交于两点

$\theta_1(r)\leqslant\theta\leqslant\theta_2(r)$ $r_1\leqslant r\leqslant r_2$

$$\iint_D f(x,y)\,dy=\int_{r_1}^{r_2}rdr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta$$

(ii)若原点为D的内点,D的边界的极坐标方程$r=r\theta$

$0\leqslant r\leqslant r(\theta)$ $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

所以$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$

(iii)若原点O在D的边界上,则Δ为

$0\leqslant r\leqslant r(\theta)$ $\partial\leqslant\theta\leqslant\beta$

于是:$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$

例6:求圆$x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$[7]

绕x轴旋转一周所得环状立体的体积

解:圆$x^2+(y-R)^2=r^2$的上,下半圆分别为

$$y=f_2(x)=R+\sqrt{r^2-x^2}\qquad |x|\le r$$

$$y=f_1(x)=R-\sqrt{r^2-x^2}$$

故圆环体的截面面积函数是

$$A(x)=\pi[f_2(x)]^2-\pi[f_1(x)]^2$$

$$=4\pi R\sqrt{r^2-x^2}\qquad x\in[-r,R]$$

由此得圆环体的体积为

$$V=8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=2\pi^2r^2R$$

当然,在计算长度、面积、体积上肯定还会有很多更好的方法,本文只是从微积分的入手进行探讨的,希望通过以后的学习会掌握其他更好的方法。

(下转69页)

[4]汪家鼎,陈家镛.溶剂萃取手册[M].北京:化学工业出版社,2001.
[5]刘洪,郝朝阳,朱静平.钛白石膏的物相组成及其脱水性能的研究[J].西昌学院学报(自然科学版),2010,9(3):29-31.

Study on Purification Technology of Titanium Gypsum

ZHU Jing-ping, LUO Qian, LIU Hong
(School of Applied and Chemical Engineering, Xichang College, Xichang, Sichuan 615013)

Abstract: The Fe in Titanium Gypsum is the major factor for its usability. The P507 extraction and acetone method were compared to find the optimal purification technology from Titanium Gypsum. The results showed, under the optimal conditions of 25℃, A/O=2/1, the volume fraction of 30%, equilibrium time was 45 min. The extraction rate of Fe is 63.97% by using P507. Acetone method was more simple than extraction method. It can get pure Titanium Gypsum. So it can be used as the industrial production of the best method for removing iron application.

Key words: Titanium Gypsum; Purification; Extraction method; Acetone method

(上接56页)

注释及参考文献:

[1][美]C.H.爱德华.张鸿林译.微积分发展史[M].北京:北京出版社,1989.
[2]龚昇,张声雷.简明微积分[M].合肥:中国科学技术出版社,1997.
[3]华东师范大学数学系.数学分析(第三版)[M].北京:高等教育出版社,2001.
[4]梅向明,黄敬之.微分几何(第二版)[M].北京:高等教育出版社,1988.
[5]强文久等.数学分析的基本概念与方法[M].北京:高等教育出版社,1989.
[6][日]堑江城夫,桑原等.微积分讲解[M].四川:四川人民出版社,1983.
[7][德]戴根等.微积分题解(第二卷)[M].北京:人民教育出版社,1981.

The Application of the Calculus in Calculation About Geometry

FENG Yi-hu, ZHANG Zong-biao
(Bozhou Teachers' College, Bozhou, Anhui 236800)

Abstract: The application of Calculus in length, area, and volume were discussed in this paper from three aspects, starting from the simple geometric problems to complicated by Calculus, which proved the importance of the application of Calculus in Geometric Calculation.

Key words: Calculus; Length; Square; Volume