第26卷第2期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.26,NO.2
2012年06月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Jun.,2012

解析面积坐标系与射影坐标系之间的内在联系

郭华元
(西昌学院,四川 西昌 615013)

【摘 要】文献[1]中创立了一种很有用的面积坐标,但是未弄清楚面积坐标系与原有的一些坐标系之间的联系,并且出现了“若$u_1+u_2+u_3=0$,就说$(u_1:u_2:u_3)$代表一个无穷远点”等错误,本文就这些问题进行解析,并得到结论:面积坐标系就是一种特殊的射影坐标系。

【关键词】面积坐标系;射影坐标系
【中图分类号】O185 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2012)02-0050-04

原有的坐标系中,仿射坐标系是射影坐标系的特殊情况,笛氏坐标系又是仿射坐标系的特殊情况;当然还有极坐标系等问题,但它们与笛氏坐标系的关系都是清楚的。因此弄清楚面积坐标系与射影坐标系之间的内在联系,问题也就清楚了。

1 什么是面积坐标系

用面积建立坐标系是很有新意的,有兴趣的读者可以参见文献[1]中有关内容。为了叙述方便本文对此也略作阐述,并作了适当增补。

要建立面积坐标系,首先必须弄清楚什么是带号面积。按通常规定,一个简单多边形(即边界不和自己相交的多边形),它的面积可以依照边界的“走向”而规定一个正负号。在这里,规定边界的走向为逆时针方向时,它的面积为正;反之,边界的走向为顺时针方向时,它的面积为负。至于边界的走向,可以在图上用箭头表明,也可以用多边形顶点的顺序表明。例如在图1中

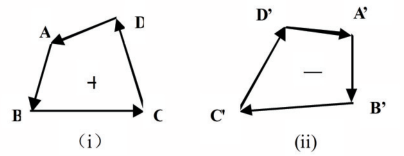

图1 正负面积

(1) $S_{ABCD}>0$

(2) $S_{A'B'C'D'}<0$

为了区分带号面积与非带号面积,有些书上用表示面积的符号上加画一横线来表示带号面积。例如将上面的带号面积表示:

$\overline{S}_{ABCD}=-\overline{S}_{DCBA}$;$\overline{\triangle}_{ABC}=-\overline{\triangle}_{BAC}$。

由于本文以下提到的面积都是带号面积,为了叙述起来简单,就不在表示面积的符号上加划横线,但一律仍表示带号面积。

要建立面积坐标系,还必须弄清楚带号面积的加法规律,在这里不进行详细的阐述。显然在图2中,无论是情况(i)或情况(ii)都有下面的等式成立:

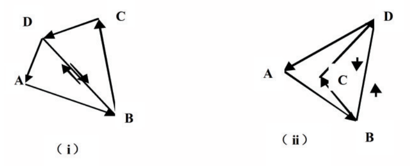

图2 面积加法

$S_{ABD}+S_{BCD}=S_{ABCD}$。

有了带号面积,就可以建立面积坐标系了。

在欧氏平面上任取一个定向三角形$\triangle A_1A_2A_3$,把它叫做“坐标三角形”,其中A_1、A_2、A_3叫做基点。对于平面上任意一点P,就有了三个三角形:$\triangle PA_2A_3$、$\triangle PA_3A_1$、$\triangle PA_1A_2$,把这三个三角形的带号面积分别记作:

$S_1=\triangle PA_2A_3,S_2=\triangle PA_3A_1,S_3=\triangle PA_1A_2$。

这三个三角形的定向由三角形$\triangle A_1A_2A_3$中三边的走向确定,如图3。约定把三元数组(S_1,S_2,S_3)叫做点P在以$\triangle A_1A_2A_3$为坐标三角形的坐标系里的“面积坐标”,记作:

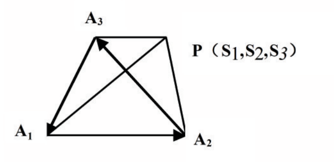

图3 面积坐标

$P=(S_1,S_2,S_3)$。

如果记$S=\triangle A_1A_2A_3$,当$S>0$便称为右手系,$S<0$时,称为左手系。当不加说明时,通常指$S>0$的右手坐标系。

显然,相同的点有相同的坐标,不同的点有不同的坐标,S_1,S_2,S_3分别叫做点P的三个“坐标分量”。

不过,随意给出一个三元数组(x_1,x_2,x_3),可不一定是某个点的坐标。因为一个点的坐标$P(S_1,S_2,S_3)$一定满足:$S_1+S_2+S_3=S$。例如在上面的坐标系里,

收稿日期:2012-03-17
作者简介:郭华元(1944-),男,讲师,主要从事几何和方程教学工作。

就找不到坐标为(–1,–5,–2)的点。也就是说平面上的点P与任意三元数组(x_1,x_2,x_3)之间不存在一一对应关系。因为三个坐标分量之间满足等式$S_1+S_2+S_3=S$,那么只要知道其中两个分量,便可以写出第三个分量来。例如S=8时,一个点的坐标是(3,6,x),那么这个x=–1。虽然平面上的点P与三元数组之间不存在一一对应关系,但是点P与二元数组(S_1,S_2)之间就建立起了一个一 一对应关系。事实上,只要知到了点P的两个坐标(S_1,S_2),那么点P的位置就被唯一确定了。例如在上例S=8的坐标系里,设P(S_1,S_2)=(–5,–9),那么可以这样来确定P点的位置(如图4)。因为知道S_1=–5,那么点P一定是以A_2A_3为底边,面积等于–5的某个三角形的顶点。而这样的三角形$\triangle PA_2A_3$的顶点P的集合构成了一条平行于A_2A_3的直线M_1,根据S_1=–5完全可以准确的画出来;同理根椐S_2=–9,又可以准确地画出A_3A_1的平行线M_2的位置。那么M_1与M_2的交点P就被唯一确定了。显然这样确定的P点的坐标(S_1,S_2,S_3)可以满足条件:

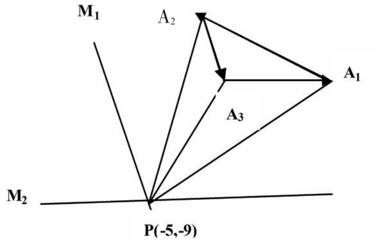

图4　由坐标求点

$S_1=-5,S_2=-9,S_1+S_2+S_3=S=8$。

所以这样建立了平面上的点P与二元数组(S_1,S_2)之间一个一一对应关系。

为什么要建立坐标系呢?众所周知建立坐标系的目的是为了找到几何图形(或函数图像)与它们的函数关系表示法之间的对应关系。为此首先要找到的就是平面上的点与它们的坐标构成的数组的集合之间的一一对应关系。如果没有这样的一一对应关系是不行的。刚才上面已经指出,在S=8的面积坐标系里就找不到坐标(–1,–5,–2)的点,但是(–1,–5,–2)满足方程$3X_1-X_2+X_3=0$,如此看来满足方程$3X_1-X_2+X_3=0$的三元数组还不一定有对应点,这样的坐标系是无用的。

2 面积坐标系与射影坐标系的内在联系

初看起来,在建立面积坐标系的时侯,只选取了三个不共线的基点A_1、A_2、A_3为坐标三角形的顶点,而在射影坐标系中,除了这三个基点以外,另外还有一个不在坐标三角形$\triangle A_1A_2A_3$三条边上的单位点E存在。因此一个射影坐标系($A_1A_2A_3E$)是任意三点都不共线的四个点构成的,这是上面两个坐标系不同的地方。其实不然,面积坐标系里的单位点E也是存在的,只不过这个单位点是三角形$\triangle A_1A_2A_3$的一个特殊点(重心),而没有写出来而已。正因为这样,再加上条件$S_1+S_2+S_3=S$,得到的是平面上的点P与二元数组(S_1,S_2)之间的1–1对应关系,而不能找到平面上的点P与非零类的三元数组(X_1,X_2,X_3)类之间的一个一一对应关系。下面进一步阐述这个事实。在欧氏平面上任取一个定向三角形$\triangle A_1A_2A_3$,作为坐标三角形。这个坐标三角形就是云南师大朱德祥先生所编的《高等几何》教材上的坐标三角形[2],只不过这里规定了坐标三角形的正方向(逆时针方向)。A_1,A_2,A_3叫做坐标三角形的基点(或顶点)。还要另取一个E点是不在坐标三角形的三条边所在直线上的任意一点,叫做单位点。这样无三点共线的四个点构成了一个射影坐标系,记为射影坐标系($A_1A_2A_3E$)。笔者将仿照前面用面积的办法来建立平面上的点P与非零类的三元数组(X_1,X_2,X_3)之间的一一对应关系。

若点P是平面上的任意点,相对于坐标三角形$\triangle A_1A_2A_3$,对于单位点E和点P,各有三个三角形:

E点:$\triangle EA_2A_3$,$\triangle EA_3A_1$,$\triangle EA_1A_2$。

P点:$\triangle PA_2A_3$,$\triangle PA_3A_1$,$\triangle PA_1A_2$。

现将这六个三角形的带号面积依次记为:e_1,e_2,e_3;s_1,s_2,s_3。其中这六个三角形的定向都是由$\triangle A_1A_2A_3$中三边的走向确定的(如图5)。

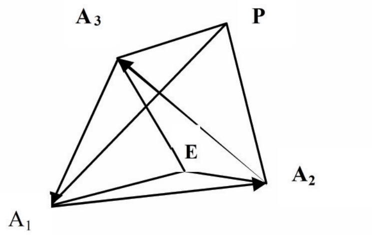

图5　面积射影坐标系

从高等几何中可知道,一个点的射影齐次坐标有无穷多个,它们构成一个非零的"类"。或者干脆说:射影平面就是由这些三元数组构成的全体"非零类"的集合。在这里规定把上面的三元数组($s_1/e_1,s_2/e_2,s_3/e_3$)所在的类的任意一个齐次坐标叫做点P的一个射影齐次坐标。所谓"类"的概念。即若(x_1,x_2,x_3)是点P的一个齐次坐标,则(x_1,x_2,x_3)与($s_1/e_1,s_2/e_2,s_3/e_3$)必属于同一个类,就是满足:

$x_1:x_2:x_3=s_1/e_1:s_2/e_2:s_3/e_3$

或$(x_1,x_2,x_3)=k(s_1/e_1,s_2/e_2,s_3/e_3)(k\neq0)$。

记为$(x_1,x_2,x_3)\backsim(s_1/e_1,s_2/e_2,s_3/e_3)$

这样就用面积射影坐标系($A_1A_2A_3E$)建立起了

射影平面上的点P与全体三元数组所构成的“非零类”的集合之间的一个一一对应关系。事实上，由上面的面积方法，可以算出平面上的任意一点的一个齐次坐标：$(s_1/e_1, s_2/e_2, s_3/e_3)$，因而也就找到了这个齐次坐标所在的类；反过来又可以证明，对于一个任意给定的“非零类”，假设(x_1, x_2, x_3)是这个类中的一个齐次坐标，总可以求出平面上的一个唯一的点P，使得$(x_1, x_2, x_3) \backsim (s_1/e_1, s_2/e_2, s_3/e_3)$。其实只要找到这里用面积的方法建立起来的射影坐标系与高等几何上使用的射影坐标系之间的内在联系，问题也就解决了。为此，现在用这种面积方法确定的齐次射影坐标系与文献[2]中§5.2“平面内的射影坐标系”这节规定的射影齐次坐标之间的内在联系，问题就清楚了。实际上这两个方法规定的射影齐次坐标完全是一回事情。文献[2]中确定点P射影齐次坐标的办法不是用面积之比$(s_1/e_1, s_2/e_2, s_3/e_3)$，而是用P点和E点到坐标三角形$\triangle A_1A_2A_3$三边的有向距离的比的办法来给出的。假如点P和点E到坐标三角形的三条边A_2A_3，A_3A_1，A_1A_2的有向距离分别依次记为：

P点：p_1, p_2, p_3　　E点：l_1, l_2, l_3

当然这里有向距离的正负的确定应该和带号面积的符号保持一致。只要略加注意这是完全办得到的。例如见图6中的情况，对A_2A_3这条边就可以这样规定：根据A_2A_3上箭头的走向，当点P在直线A_2A_3右边时，面积$\triangle PA_2A_3 < 0$，就规定P点到直线A_2A_3的距离p_1为负的。这样规定以后，显然当P’点在直线A_2A_3的左边时，$\triangle P'A_2A_3 > 0$，同时P’点到直线A_2A_3的距离p_1’也相应的为正了。这样再根据共底的两个三角形面积之比等于对应高之比就得到：

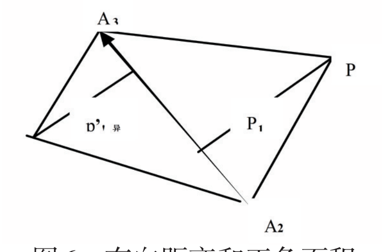

图6　有向距离和正负面积

$s_1/e_1=p_1/l_1, s_2/e_2=p_2/l_2$　　$s_3/e_3=p_3/l_3$。

于是

$x_1:x_2:x_3=s_1/e_1:s_2/e_2:s_3/e_3=p_1/l_1:p_2/l_2:p_3/l_3$。

这就完全和文献[2]中的射影齐次坐标系一致了。

当然无论是有向距离或是带号面积都是欧氏几何概念，但在文献[2]或梅向明等人编写的教材[3]中都阐明了，这样建立的射影坐标系是不依赖于欧氏概念的，它们完全可以用射影几何的概念“交比”来表达。

若在上面建立射影坐标系$(A_1A_2A_3E)$中，选坐标三角形$\triangle A_1A_2A_3$的重心（三条中线的交点）为单位点E，那么此时显然有

$\triangle EA_2A_3=\triangle EA_3A_1=\triangle EA_1A_2=1/3\quad\triangle A_1A_2A_3$

因而有（见图7）

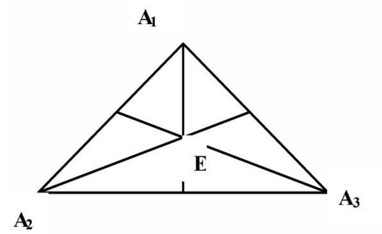

图7　重心坐标系

$e_1=e_2=e_3=1/3\ S$

由此可以得出这时应有：

$s_1/e_1:s_2/e_2:s_3/e_3=s_1:s_2:s_3$

在这个射影坐标系$(A_1A_2A_3E)$下，点P的一个齐次射影坐标就是(s_1, s_2, s_3)，并且$S_1+S_2+S_3=S$，这就是本文前面提到的文献[1]中所说的面积坐标系。故这种面积坐标系梅向明把它叫做重心坐标系，它只是一般射影坐标系的一个特殊情况。由此也可以把$(s_1/s_3, s_2/s_3)$看做仿射坐标，但不能说$(s_1/s, s_2/s)$是仿射坐标。

3 坐标变换公式及计算

既然面积坐标系只是一般射影坐标系中的一种特殊的情况，而任两个射影坐标系之间的坐标变换公式一般形式为：

$$m\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad m\ |a_{ij}| \neq 0$$

那么面积坐标系与射影坐标系之间的坐标变换公式也具有这样的形式。根据这条理由，显然更容易找出具体的面积坐标系与其它的射影坐标系（包括笛氏坐标系）之间的坐标变换公式。在具体问题中只要给出面积坐标系各基点和单位点的笛氏坐标，使用待定系数法就可以确定上面所说的坐标变换公式中的系数矩阵了。

例：设在平面直角坐标系OXY里，面积坐标系中$\triangle A_1A_2A_3$的三个顶点的笛氏坐标分别为

$A_3(0,0)$，$A_1(\sqrt{2},0)$，$A_2(0,\sqrt{2})$。

单位点的笛氏坐标为E(2,3)，求面积坐标系与笛氏坐标系之间的变换公式。

解：因为基点和单位点在坐标系$(A_1A_2A_3E)$里的坐标分别为：

$A_3(0,0,1)$，$A_1(1,0,0)$，$A_2(0,1,0)$，$E(1,1,1)$。

通过待定系数法可得到从笛氏坐标(x,y)到在

$(A_1A_2A_3E)$系下的面积射影坐标(s_1, s_2, s_3)之间的坐标变换公式为:

$$m\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ \frac{5+\sqrt{2}}{23} & \frac{5+\sqrt{2}}{23} & \frac{2+5\sqrt{2}}{-23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

另外,上面所选坐标三角形$\triangle A_1A_2A_3$的重心为O$(\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3)$,假如将上面的单位点从E(2,3)改为重心点O$(\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3)$,这时笛氏坐标到射影坐标的变换公式为:

$$m\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}, & 0 & , & 0 \\ 0 & ,1/\sqrt{2} & , & 0 \\ -1/\sqrt{2}, & -1/\sqrt{2}, & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

这时(s_1, s_2, s_3)就是前面文献[1]中的面积坐标,并且$s_1+s_2+s_3=ks(k \neq 0)$。

齐次坐标有两种表示法,一种为:$s_1:s_2:s_3=\mu_1:\mu_2:\mu_3$;另一种为:$(\mu_1, \mu_2, \mu_3)=k(s_1, s_2, s_3)(k \neq 0)$。它们完全是等价的。因此不能说:当$\mu_1+\mu_2+\mu_3=0$时,$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$代表一个无穷远点。

此外不难得到直线方程及其变换公式。

注释及参考文献:

[1]张景中,曹培生.从数学教育到教育数学[M].北京:中国少年儿童出版社,2005.1.

[2]朱德祥.高等几何[M].北京:高等教育出版社,1983.9.

[3]梅向明,刘增贤,林向岩.高等几何[M].北京:高等教育出版社,1983.11.

Analysis of the Inner Link Between the Area Coordinate System and the Projective System

GUO Hua-yuan

(Xichang College, Xichang, Sichuan 615013)

Abstract: Literature[1] has created a very useful area coordinate, but not well understood the link between the area coordinate system and some of the original coordinate system. In addition, there appear some errors like "if the $u_1+u_2+u_3=0$, that is $(u_1: u_2: u_3)$ represent a infinity points". This article wants to analyze these problems and gets conclusion, area coordinate system is a special kind of projective coordinate system.

Key words: Area coordinate system; Projective coordinate system