关于一类函数图像描绘的思考*

马纪英,单东明
(石家庄邮电职业技术学院,河北 石家庄 050021)

【摘　要】$y=e^{-x^2}$是高等数学中一类非常有用的函数,利用$y'=e^{-x^2}$的图像描绘,展现该函数在微分方程、变上限定积分、导数应用、重积分、极限等各方面与高等数学的联系,并着重介绍了这类函数在正态分布的分布函数中的应用。

【关键词】$y=e^{-x^2}$;图像描绘;重积分;正态分布
【中图分类号】O157.5　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2012)02-0048-02

函数$y=e^{-x^2}$是高等数学中一类非常重要的函数,有关它的讨论涉及到高等数学的极限、导数、积分、微分方程、图像描绘等各个领域,下面以它的一种特殊形式$y'=e^{-x^2}$的图像描绘为例,展现它与高等数学各个方面的联系,并以正态分布的分布函数的图像为例展现该类函数图像的应用。

1 确定微分方程$y'=e^{-x^2}$的解

在不定积分的学习中,我们知道e^{-x^2}的原函数是不存在的,因而可以使用变上限定积分的形式来表示,即为

$$y=\int_a^x e^{-t^2}dt+C$$

其中,a为任意的实数,为简便起见不妨设为0;C也为任意的常数,它表示所求得的函数图像是可以上下平移的一个函数族,为简便起见不妨也设为0。

于是,可以得到

$$y=\int_0^x e^{-t^2}dt$$

2 利用函数图像描绘的步骤确定$y=\int_0^x e^{-t^2}dt$的图像

2.1 确定函数的定义域

根据函数$y=\int_0^x e^{-t^2}dt$,显然可知x的取值范围是$(-\infty,+\infty)$。

2.2 确定函数的极值

由$y'=e^{-x^2}>0$,可知函数$y=\int_0^x e^{-t^2}dt$在整个定义域$(-\infty,+\infty)$上是增函数。

2.3 确定函数的拐点

由$y''=\left(e^{-x^2}\right)'=-2xe^{-x^2}$,令y''=0,可以得到x=0。于是,

$x=0$, $y=\int_0^0 e^{-t^2}dt=0$

即拐点为(0,0)。

2.4 确定函数的渐进线

由于函数没有不可导点,所以函数没有铅直渐进线。

下面,考虑它的水平渐进线:

由$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$

引例[1]　计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$,其中D是由中心在原点、半径为a的圆周所围成的闭区域。

解　在极坐标系中,闭区域D可表示为
$0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。

于是
$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_D e^{-r^2}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a e^{-r^2}rdr\right]d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a d\theta=\frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\int_0^{2\pi}d\theta$$
$$=\pi(1-e^{-a^2})$$

下面,来计算$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$

设
$$D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2,x\ge0,y\ge0\right\}$$
$$D_2=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2R^2,x\ge0,y\ge0\right\}$$
$$S=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le R,0\le y\le R\right\}$$

显然$D_1\subset S\subset D_2$。由于$e^{-x^2-y^2}>0$,从而在这些闭区域上的二重积分之间有不等式

$$\iint\limits_{D_1}e^{-x^2-y^2}dxdy<\iint\limits_{S}e^{-x^2-y^2}dxdy<\iint\limits_{D_2}e^{-x^2-y^2}dxdy$$

因为

$$\iint\limits_{S}e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

又利用引例的结果有

$$\iint\limits_{D_1}e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$$
$$\iint\limits_{D_2}e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

于是上面的不等式可以写成

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})<\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2<\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

令$R\to+\infty$,上式两端趋于同一极限$\frac{\pi}{4}$,从而

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

所以
$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

收稿日期:2012-03-15
*基金项目:河北省高等学校人文社会科学研究项目(项目编号:SZ2011331)。
作者简介:马纪英(1981-　),男,河北南宫人,讲师,本科,主要研究方向:数学教育,计算数学。

同理，

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^{-\infty}e^{-x^2}dx=-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2.5 函数图像的描绘

根据2.1~2.4得到的函数的定义域、增减性、凹凸性、渐进线的情况，通过简单的描点操作，可以得出函数 $y=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的图像。如下图1所示。

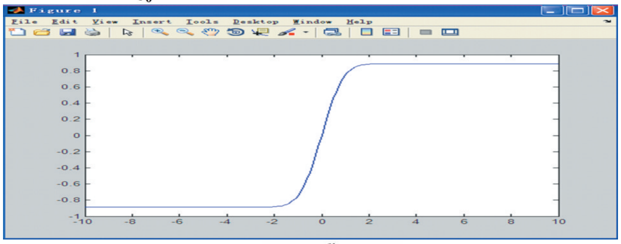

图1　函数 $y=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的图像

3　函数图像的应用

正态分布是概率论与数理统计中关于连续型随机变量的最重要的分布之一，在自然现象和社会现象中，大量的随机变量都服从或近似服从正态分布，根据中心极限定理，独立同分布的随机变量之和也服从正态分布[2,3]。

因此，研究正态分布，尤其是标准正态分布的分布函数无论是在概率的计算还是图像的表达上都显得至关重要。

正态分布的概率密度函数为

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$\mu$，$\sigma>0$ 为常数，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时为标准正态分布，记为 $X\sim N(0,1)$，概率密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in(-\infty,+\infty)。$$

根据随机变量分布函数的定义可知，它们的分布函数分别为

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^x \varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

它们的图像具有与函数 $y=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的图像相似的结构，分别为图2和图3。

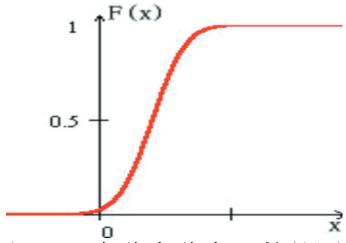

图2　正态分布分布函数的图像

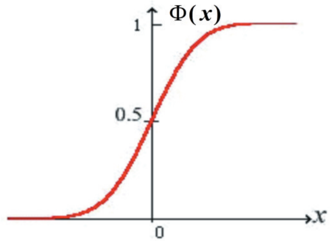

图3　标准正态分布分布函数的图像

4　小结

通过对函数 $y'=e^{-x^2}$ 的图像描绘，展现了该函数在高等数学中的综合应用，内容涉及微分方程、变上限定积分、导数的应用、重积分、极限的应用等各个方面，可以作为一个典型案例应用于高等数学的教学之中。另外，$y=e^{-x^2}$ 作为一个特殊的函数类，它及它的同类函数在高等数学中有着广泛的用途，诸如正态分布、欧拉积分、拉普拉斯变换、傅里叶级数等等[4]。因此，研究这类函数的图像具有非常重要的意义和广阔的应用前景。

注释及参考文献：

[1]同济大学数学教研室.高等数学(下册)(第四版)[M].北京：高等教育出版社，1996：108-109.

[2]盛骤等.概率论与数理统计(第三版)[M].北京：高等教育出版社，2001：147-148.

[3]马纪英，单东明，贾慧美.基于正态分布的11185客服中心人员配备分析[J].长江大学学报(自然科学版)，2010，7(3)435-437.

[4]陈仁政.不可思议的e[M].北京：科学出版社，2005：133-134，147-152，161-169.

Thoughts Concerning the Image Description of a Class of Functions

MA Ji-ying，SHAN Dong-ming

(Shijiazhuang Post & Telecommunication Technical College，Shijiazhuang，Hebei 050021)

Abstract: $y=e^{-x^2}$ is a very useful function of engineering mathematics. Using the image description of $y'=e^{-x^2}$, it shows that the function is closely related to advanced mathematics on the differential equations, the definite integral of transformation top limit, the derivative applications, the multiple integrals and the limit of function. And it focuses on the application of such functions in the distribution function of the normal distribution.

Key words: $y=e^{-x^2}$；Image description；Multiple integrals；Normal distribution