分次环和分次模的性质

陆亚哲
（西南交通大学 数学学院,四川 成都 610031）

【摘 要】本文主要是在已知分次环和分次模的性质的基础上,细化了有关命题的证明,并推出分次环和分次模的新的结论。
【关键词】分次环;分次模;素理想;齐次子模;Noether环;自由模;投射模
【中图分类号】O153.3 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2012)02-0044-02

分次环和分次模是在代数几何中射影代数簇的背景下产生的,关于它的研究很多,本文在已知分次环和分次模的内容上,细化了它的理想关命题的证明,并得出分次环的子模的有限生成特性。并由分次环看做自身上的自由模,推出分次环的基的性质。

1 定义与命题

定义1:(具有幺元的交换)环A称为分次环。若它满足下面两个条件:

(1)作为加法群A是可数无穷多个子群的直和,即$A=\overset{\infty}{\underset{N=0}{\oplus}}A_n$

(2)对于乘法,$A_nA_m\subseteqq A_{n+m}$

定义2:设$A=\overset{\infty}{\underset{N=0}{\oplus}}A_n$是分次环,则A-模M叫做分次模,若它满足下面两个条件:

(1)M是可数无穷多个A-子模的直和,即

$$M=\overset{\infty}{\underset{N=0}{\oplus}}M_n$$

(2)$AmMn\subseteqq M_{n+m}$

定义3:A-模同态f:M→N称为分次的,若$\exists k\in Z$,s.t$f(M_n)\subseteqq N_{n+k}$,其中k叫做分次同态的次数。

定义4:分次A-模N的子模$N^{\cdot}$是齐次的,若子模中的所有元素都是齐次分量。即$x\in N^{\cdot}$,则x得所有齐次分量均属于$N^{\cdot}$。

同样的,有齐次理想的定义如下:

定义5:A的理想α叫做是齐次的,是指它满足如下条件:若$x\in\alpha$,则x得所有齐次分量均属于α。

在上面的定义下,可证得以下结论:

命题1:若M,N是分次模,则

(1)分次同态f:M→N的核和象都是齐次子模。

(2)若I是A中的齐次子模,定义$(A/I)_p=\left(A_p+I\right)/I$则A/I是分次模且

$$A/I=\sum_p(A/I)_p\cong\sum A_p/I\cap A_p=\sum\left(A_p/I_p\right)$$

(3)A中的幺元1是次数为0的齐次元素。

命题2:若M是分次A-模。则M的零化子是A的齐次理想。

在环的学习中,最基本的理想是素理想和极大理想。那么,齐次理想和素理想、极大理想之间有什么关系呢?

关于素理想,有下面的命题:

命题3:设$A=\underset{n\geq 0}{\oplus}A_n$是分次环,$\rho=\underset{n\geq 0}{\oplus}\rho_n$为A的齐次理想($\rho_n\subseteq A_n$)。则ρ为A的素理想⇔若$a\in A_m,b\in A_n,ab\in\rho$,则$a\in\rho$或者$b\in\rho$。

由于每个极大理想都是素理想,每个极大理想也满足上述条件。

由接下来的引理得出有限生成分次模的子模有限生成特性。

引理1:设$A=\overset{\infty}{\underset{N=0}{\oplus}}A_n$是分次环。则A为Noether环⇔$A_0$为Noether环且A为有限生成$A_0$-代数

引理2:交换环R是Noether环⇔有限生成的R-模M的每个子模是有限生成的。

由上面两个定理,可以推出下面的结论:

命题4:设$A=\overset{\infty}{\underset{N=0}{\oplus}}A_n$是分次环。$A_0$为Noether环且A为有限生成$A_0$-代数⇔有限生成的分次A-模的每个子模都是有限生成的。

我们知道,交换环R看做自身上的模时,就是自由模。因此分次环可看做自身上的自由R-模。每个自由摸都是投射模,因此分次环也是投射模。它也就具有投射模的性质。

结论:若分次环是非零交换环,则分次环的任意两个基具有相同的基数。

若分次环是非零交换环,两个分次模具有相同的基数当且仅当基中元素的个数相同。

由自由模的性质,就可得出上述性质。

2 证明

(命题1的证明):(1)记f:M→N

$\alpha=(a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots)\in kerf$

$\therefore f(\alpha)=(b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots)=0$

收稿日期:2012-03-22
作者简介:陆亚哲(1985-),女,硕士,主要研究代数几何方向。

由分次同态的性质可得:$f(a_n)=b_{n+k}=0$

$\therefore a_n \in kerf$即kerf是分次子模。

同理可证imf是分次子模。

记$b=(b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots) \in imf$

由$f(a_n)=b_{n+k}$得$b_{n+k} \in imf$即可证之。

(2)定义自然同态$f: M \to A/I$,

则$kerf=I, imf \cong A/I$,

即A/I是齐次子模,即分次模。

Q $(A/I)_p=(A_p+I)/I$

$\therefore A/I=\sum_p (A/I)_p=\sum_P (A_p+I)/I$

定义自然同态:$f: A_p+I \to (A_p+I)/I$可以诱导出

同态$A_p \to (A_p+I)/I$,可以确定f把A_p映射到$(A_p+I)/I$。

$\because$若$x+I \in (A_p+I)/I$,则$x \in (A_p+I)/I$

令$x=y+z(y \in A_p, z \in I)$,

则$x+I=y+I=f(y)$

又$kerf=A_p \cap I$

$\therefore$由第一同构定理可得$A_p/(I \cap A_p) \cong (A_p+I)/I$。

又$I \cap A_p=I_p$

即可得结论$A/I=\sum_p (A/I)_p \cong \sum A_p/I \cap A_p=\sum (A_p/I_p)$

(3)记$1=e_1, e_2, \cdots, e_t$,其中$e_i \in A_i$,

若$a_p \in A_p$,

则$a_p-e_0a_p=e_1a_p+\cdots e_ta_p \in A_p \cap (A_{p+1} \oplus \cdots \oplus A_{p+t})=\{0\}$

$\therefore a_p=e_0a_p$即可得;$a=e_0a$

同理可得:$a=a_{e0}$

$\therefore e_0=1$即可证得结论。

(命题2的证明):记M得零化子为$annM=\{a \in A \mid aM=0\}$

要证它是A的分次理想,即证明annM可由齐次元素生成。

记$\alpha=(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$,若$\alpha \in annM$,则

$a_0M+a_1M+\cdots+a_nM=0$,即$a_n \in M$

annM是分次理想。

(命题3的证明):($\Rightarrow$)Q ρ为A的素理想

$\therefore$根据素理想的定义很容易推出若$a \in A_m, b \in A_n, ab \in \rho$则$a \in \rho$或者$b \in \rho$。

($\Leftarrow$)若$a \in A_m, b \in A_n, ab \in \rho$,

若$A=\rho$,则$a \in \rho$且$b \in \rho$与已知矛盾。

则$A \neq \rho$

又$ab \in \rho$,则$a \in \rho$或者$b \in \rho$。

$\therefore \rho$为A的素理想

(命题4的证明):设$A=\bigoplus_{N=0}^{\infty} A_n$是分次环。$A_0$为Noether环且A为有限生成$A_0$-代数$\Leftrightarrow$则A为Noether环

交换环R是Noether环$\Leftrightarrow$有限生成的R-模M的每个子模是有限生成的。

综上可知有限生成的分次模的每个子模都是有限生成的。

3 总结

本文是在分次环、分次模的已知内容上,细化了某些命题的证明,证得分次同态的核、像都是齐次子模,且分次子模的商模也是分次子模,齐次理想在一定条件下是素理想,有限生成分次模的子模的有限生成特性。由于分次环可以看做自身上的自由模,可得出分次环的基的某些性质。

注释及参考文献:

[1]Rotman.Advanced Modern Algebra[M].Higher Education Press.2007.

[2]冯克勤.交换代数基础[M].北京高等教育出版社,1986.

[3]Assem.Elements of the Representation Theory of Associative Algebras[M].北京:世界图书出版公司2011.

[4]王尧.分次代数的分次雅各布森根[J].东北师大学报,2002(3),32-35.

The Properties of the Graded Ring and Module

LU Ya-zhe

(Mathematic Department, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031)

Abstract: On the basis of the known properties of graded ring and graded modul, the primary goal is to detail the proof of the given proposition and deduce the new conclusion, then prove it.

Key words: Graded ring; Graded module; Prime ideal; Graded submodule; Noether ring; Free module; Projective module