第26卷第2期　　西昌学院学报·自然科学版　　Vol.26,NO.2
2012年06月　　Journal of Xichang College·Natural Science Edition　　Jun.,2012

震荡原理及其应用

郭时光
（四川理工学院 理学院,四川 自贡 643000）

【摘　要】研究Poisson方程边值问题,为了简化其解的存在性判定以及计算,采用数学推导方法,得出Poisson方程边值问题由其Poisson方程自身及其Direchlet条件一意确定的结论,使得这类问题化简。

【关键词】Poisson方程;Direchlet条件;边值问题;震荡原理
【中图分类号】O175.8　**【文献标识码】**A　**【文章编号】**1673-1891(2012)02-0042-02

关于Poisson方程边值问题的讨论已经是一个十分古老的议题了。然而,由于该问题花样繁多,难以全面把握。为了克服这一困局,笔者提出震荡原理,用之可以使得这类问题的求解能够统一解决。

1 引理

考虑下列形式的Poisson方程边值问题[1-4]

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta w(x)=f(x) & (x\in D_k)\\ w(\xi)=g(\xi) & (\xi\in\partial D_k)\\ A(\xi)w+B(\xi)w_n=h(\xi) & (\xi\in s)\end{array}\right\}\qquad(1)$$

其中:Δ是laplace算子;D_k是k维实空间中的有界区域,∂D_k是D_k的边界;s是$D_k+\partial D_k$上能与∂D_k的一部分组成封闭边界的连续点集;n是边界∂D_k的外法线方向;A(ξ),B(ξ)均为已知函数,且有A(ξ)≥0,B(ξ)≤0,$A^2(\xi)+B^2(\xi)\neq0$;f(x),g(ξ),h(ξ)均为已知函数。问题(1)所对应的Poisson方程Direchlet问题为

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta w(x)=f(x) & (x\in D_k)\\ w(\xi)=g(\xi) & (\xi\in\partial D_k)\end{array}\right\}\qquad(2)$$

引理1[5-8]　(解的存在唯一性定理)在Poisson方程边值问题(1)中,设A(ξ)不恒等于零。如果该问题存在解,那么其解是唯一的。如果Poisson方程Direchlet问题(2)存在解,那么其解是唯一的。

2 震荡原理及其证明

定理1　设问题(2)存在解w=w(x)。则问题(1)存在解,其充分必要条件是:这个解w=w(x)使得成立下列等式

$$A(\xi)w(\xi)+B(\xi)w_n(\xi)=h(\xi)(\xi\in s)\qquad(3)$$

此时问题(1)的解亦为w=w(x),即问题(1)的解可用问题(2)的解的表达式表示。

证　设问题(2)存在解w=w(x)。如果问题(1)也存在解$w=w_1(x)$,则$w=w_1(x)$显然也是问题(2)的解。但由引理1知,$w=w_1(x)$。所以w=w(x)满足问题(1)的边界条件,即它使得式(3)成立。必要性得证。

反过来,如果问题(2)的解w=w(x)使得式(3)成立,则解w=w(x)满足问题(1)。所以问题(1)存在解w=w(x)。充分性得证。证毕

由这个定理可知,Poisson方程边值问题,其解由其对应的Poisson方程Direchlet问题确定;而其余边界条件只能用作该问题是否存在解的判据,它对于解的形式没有任何影响。这个定理可定性地简述为:

定理2(震荡原理)　Poisson方程Direchlet边值问题由该问题中的Poisson方程自身及其Direchlet条件一意确定。

3 应用举例

例1　设圆域内极坐标rθ的Poisson方程Direchlet问题

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta u=0 & (0\le r<a,0\le\theta<2\pi)\\ u=\cos\theta & (r=a,0\le\theta<2\pi)\\ u_n=h(\theta) & (r=b,0\le\theta<2\pi)\end{array}\right\}\qquad(4)$$

其中:n是边界的外法线方向;a与b均为正数,且a>b。当h(θ)是怎样的函数时,该问题存在解?

解　问题(4)对应的Direchlet问题为

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta u=0 & (0\le r<a,0\le\theta<2\pi)\\ u=\cos\theta & (r=a,0\le\theta<2\pi)\end{array}\right\}\qquad(5)$$

用本征函数法,可求得问题(5)解的级数表达式为

$$u=u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta_0\mathrm{d}\theta_0+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left\{\left[\int_0^{2\pi}\cos\theta_0\cos n\theta_0\mathrm{d}\theta_0\right]\cos n\theta+\left[\int_0^{2\pi}\cos\theta_0\sin n\theta_0\mathrm{d}\theta_0\right]\sin\theta\right\}=\frac{r}{a}\cos\theta\qquad(6)$$

根据定理1,问题(4)如果存在解,则其解的表达式只能如式(6)所示。用这个解的表达式计算,得$u_n|_{r=b}=-u_r|_{r=b}=\frac{1}{a}\cos\theta$。所以,只有当式$h(\theta)=\frac{1}{a}\cos\theta$成立,问题(4)才存在解,此时解为式(6)所示。

例2　下列扇形域内极坐标rθ的Poisson方程Direchlet问题是否存在解?

收稿日期:2012-01-15
作者简介:郭时光(1955-　),男,重庆人,副教授,研究方向:研究代数和数学物理方程。

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta u=0 & (0\le r<1,0\le\theta<\pi)\\ u=\cos\theta & (r=1,0\le\theta<\pi)\\ u|_{\theta=0}=r,u|_{\theta=\pi}=-r & (0\le r\le 1)\end{array}\right\} \tag{7}$$

解　由例1,得问题(7)对应的全圆域Direchlet问题的解为

$$u=u(r,\theta)=r\cos\theta \tag{8}$$

根据定理1,问题(7)如果存在解,则其解的表达式只能如式(8)所示。用这个解的表达式计算问题(7)中的其它边界值,得$u|_{\theta=0}=r\cos 0=r, u|_{\theta=\pi}=r\cos\pi=-r$。所以,根据定理1,问题(7)存在解,其解为式(8)所示。

4 结论与注记

用震荡原理,即Poisson方程边值问题由其Poisson方程自身及其Direchlet条件一意确定的结论,可知这类问题中的某一个问题如果在较大范围内存在唯一解,而该问题在该范围内存在其它定解条件,则我们利用那个存在唯一的解来计算性地判定关于该问题的解是否存在,或给出其解,这就使得这类问题的求解大大化简。

震荡原理需要利用解的存在唯一性。如果Poisson方程边值问题的定解区域含有无穷远点,则没有解的存在唯一性可以利用。事实上,例如下列Poisson方程定解问题

$$\left.\begin{array}{ll}u_{xx}+u_{yy}=0 & (-\infty<x<+\infty,0<y<+\infty)\\ u|_{y=0}=0 & (-\infty<x<+\infty)\end{array}\right\} \tag{9}$$

称为伪Direchlet问题,因为它的Direchlet条件不完善。不难验证:u=cy+dxy均是其解,其中c,d均是任意常数。半空间Poisson方程伪Direchlet问题与此类似。这类问题存在无穷多解,因此,半平面与半空间的Poisson方程伪Direchlet问题不是单纯由其伪Direchlet条件确定的,对这类问题不能使用震荡原理。

注释及参考文献:

[1]王元明.数学物理方程与特殊函数(第三版)[M].北京:高等教育出版社,2003:95-97.
[2]查中伟.数学物理偏微分方程[M].成都:西南交通大学出版社,2005:139-140.
[3]郭玉翠.数学物理方法[M].北京:北京邮电大学出版社,2003:313.
[4]郭时光.数学物理方程[M].成都:西南交通大学出版社,2005:112.
[5]GUO Shi-guang.The Minimal Polynomial of Element in the Innerproduct Model-Ring[J].数学季刊,1999,14(4):8-13.
[6]GUO Shi-guang.Linear Factorization of λ-polynomial Over Quaternionic Field[J].数学季刊,2000,15(2):12-16.
[7]郭时光.矩阵内积与奇异值不等式[J].工程数学学报,2001,18(1):123-126.
[8]郭时光.环的代数封闭性[J].数学研究与评论,2002,22(4):639-646.

The Principle of Concussion and Its Application

GUO Shi-guang
(School of Science, Sichuan University of Science and Engineering, Zigong, Sichuan 643000)

Abstract: The boundary value problem of Poisson equation is studied, in order to simplify the determination of the existence of its solutions and related calculation, using the method of mathematical derivation, the conclusion that the boundary value problem of Poisson equation is decided by Poisson equation itself and Direchlet condition is derived. By using the conclusion, this kind of problem is simplified.

Key words: Poisson equation; Direchlet condition; Boundary value problem; Principle of concussion