

# 自然推理系统中的假设前提引入与消去规则

王太忠

(昭通师范高等专科学校 中文系, 云南 昭通 657000)

**【摘要】**形式化的自然推理系统最显著的特点就是引入假设前提。在自然推理中,可以根据需要随时引入假设前提,但是推理的结论不能依赖于假设前提,因此假设前提在其完成了使命后,必须被消去。运用假设前提消去规则进行推理就是按照“如果 $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ , 那么 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$ ”的规则进行语形变换的过程,但是理解假设前提消去规则何以能够消去假设前提这个问题,涉及到对前提与结论之间真假制约情况的讨论,属于语义解释的范围。

**【关键词】**自然推理;假设前提;引入;消去

**【中图分类号】**O141.1 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2012)02-0037-05

## 1 引言

“形式化是现代逻辑最重要的方法,并且是其特色所在。”<sup>[1]</sup>形式化表现为一系列严格的操作程序,在形式化程序中最为关键的一步就是构造形式系统。形式系统分为形式化的公理系统和形式化的自然推理系统。形式化的公理系统包括初始符号、形成规则、变形规则和作为一切推导出发点的公理四个组成部分,“是实现了完全形式化的公理系统。”<sup>[2]</sup>而形式化的自然推理系统没有公理,只有初始符号、形成规则和变形规则,所以,它不能像公理系统那样以公理为出发点,而是通过引入假设前提作为推理程序的出发点,按照系统内的推理规则来进行推理,并在最后消去假设前提而推导出系统内的一切定理。“由于这种演绎系统的形式推理规则、形式推理关系、形式证明比较直接并且比较自然地反映了演绎推理过程,因此它接近于自然科学,特别是一般数学中的演绎推理。所以它被称为自然推理系统。”<sup>[3]</sup>

## 2 自然推理系统中的假设前提引入规则

日常思维和科学研究中的很多结论都是有一定的条件和范围的,缺少必要的条件或者超出一定的范围,“真理”就变成了谬误。比如,生活中我们知道沸水的温度是100摄氏度,但是我们不能忽视这是在一个标准大气压下的数字。数学中的直线 $y=kx+b$ 的图像在第一、二、三象限,依赖于条件 $k>0$ 并且 $b>0$ 。物理中的“光的入射角大于折射角”这一定律如果离开“光从密度小的介质斜射进入密度大的介质”这个条件,就不成立。逻辑学在解决许多日常推理和证明的时候也是以一定的命题为前提的。

例1.高三某班的任课教师预测该班学生高考上一本线的情况。语文老师说:如果张涛和王晓燕能

上一本线,那么李亮就能上。数学老师说:如果赵鸿飞能上一本线,那么张涛就能上;如果张涛能上一本线,那么王晓燕就能上。英语老师说:赵鸿飞能上一本线。如果三位老师的预测都是真的,请问李亮能不能上一本线。

解:令 $p$ 表示“张涛能上一本线”, $q$ 表示“王晓燕能上一本线”, $r$ 表示“李亮能上一本线”, $s$ 表示“赵鸿飞能上一本线”,则三位任课教师的预测依次符号化为: $(p \wedge q) \rightarrow r, (s \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q), s$ 。推理如下:

- |             |  |                        |
|-------------|--|------------------------|
| (1) {1}     | $(p \wedge q) \rightarrow r$                 | $P_1$                  |
| (2) {2}     | $(s \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$ | $P_2$                  |
| (3) {3}     | $s$  | $P_3$                  |
| (4) {2}     | $s \rightarrow p$                            | $(2) \wedge E$         |
| (5) {2,3}   | $p$  | $(3)(4) \rightarrow E$ |
| (6) {2}     | $p \rightarrow q$                            | $(2) \wedge E$         |
| (7) {2,3}   | $q$  | $(5)(6) \rightarrow E$ |
| (8) {2,3}   | $p \wedge q$                                 | $(5)(7) \wedge I$      |
| (9) {1,2,3} | $r$  | $(1)(8) \rightarrow E$ |

由推理可知,如果三位老师的预测都是真的,那么李亮能上一本线。

例1是采用命题自然推理的方法来解决日常推理的一个例子。这个推理的结论必须依赖于给定的前提1、2、3,经过推理,到第9行得出了结论,结论前的大括号里的数字表示这个结论依赖于前提1、2、3。没有这些前提,推理将无法进行,结论也不能成立。

很多推理和证明仅仅依靠给定的前提很不方便或者无法进行,需要引入假设前提。假设前提引入规则就是指“在公式推演中,可以根据需要随时引入假设前提”。<sup>[4]</sup>

例2.如果一个球员是优秀的,他就会尽力打好每一场比赛,除非他受到情绪的影响;而一个优秀

收稿日期:2012-04-02

作者简介:王太忠(1972- ),男,湖北随州人,讲师,硕士,主要从事形式逻辑与逻辑哲学研究。

的球员是不会受到情绪影响的,除非他有思想问题;事实上一个优秀的球员是没有思想问题的。所以,如果一个球员是优秀的,他就会尽力打好每一场比赛。用命题自然推理的方法证明:如果这个推理的前提是真的,那么结论也是真的。

解:令 p 表示“一个球员是优秀的”,q 表示“他尽力打好每一场比赛”,r 表示“他受到情绪的影响”,s 表示“他有思想问题”,则这个推理的前提的真值形式分别是  $p \rightarrow (\neg r \rightarrow q)$ ,  $p \rightarrow (\neg s \rightarrow \neg r)$ ,  $p \rightarrow \neg s$ , 结论的真值形式是  $p \rightarrow q$ 。推理如下:

- (1) {1}  $p \rightarrow (\neg r \rightarrow q)$   $P_1$
- (2) {2}  $p \rightarrow (\neg s \rightarrow \neg r)$   $P_2$
- (3) {3}  $p \rightarrow \neg s$   $P_3$
- (4) {4}  $p$  Hyp
- (5) {3,4}  $\neg s$  (3)(4) $\rightarrow E$
- (6) {2,4}  $\neg s \rightarrow \neg r$  (2)(4) $\rightarrow E$
- (7) {2,3,4}  $\neg r$  (5)(6) $\rightarrow E$
- (8) {1,4}  $\neg r \rightarrow q$  (1)(4) $\rightarrow E$
- (8) {1,2,3,4}  $q$  (7)(8) $\rightarrow E$
- (9) {1,2,3}  $p \rightarrow q$  (4)(9) $\rightarrow I$

由推理可知,如果这个推理的前提是真的,那么结论也是真的。

例2要求采用命题自然推理的方法来证明日常推理的有效性,即判定日常推理形式的正确性。“自然推理系统的基本思想是确定一些推理规则,这些规则具有保真性,也就是说,依据这些规则,从真前提只会推出真结论。因此,从所要判定的推理的前提出发,依据这些规则,如果能形式地推出预期的结论,这就说明该推理如果前提真,结论就一定真,因而是有效的。”<sup>[5]</sup>例2的推理结果表明,只要给定的前提1、2和3是真实的,结论  $p \rightarrow q$  就一定是真实的。这个推理只依靠给定的前提是无法进行推理的,必须借助于给定前提之外的假设前提。第4行的公式 p 就是引入的假设前提,它作为第4个前提同给定的前提一起推演出第5、6、7、8、9行的公式,因此在这几行的公式前面的大括号里都有数字4。第9行的公式前面的大括号里没有数字4,这里涉及到本文将在后面讨论的假设前提消去规则。

假设前提并不是必须在推理或者证明的一开始引入,而是根据需要随时引入的。

例3用谓词自然推理的方法检验下列推理的有效性。

如果医生向病危患者隐瞒病情的行为是善意的欺骗行为,那么,只要一切善意的欺骗行为都是可以原谅的,医生向病危患者隐瞒病情的行为就是

可以原谅的。因此,如果一切善意的欺骗行为都是可以原谅的,那么,只要医生向病危患者隐瞒病情的行为是善意的欺骗行为,这种行为就是可以原谅的。

解:令  $Dx$  表示“x 是医生向病危患者隐瞒病情的行为”, $Gx$  表示“x 是善意的欺骗行为”, $Ex$  表示“x 是可以原谅的行为”,则这个推理的前提的量化式是  $\forall x((Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x((Gx \rightarrow Ex) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex)))$ , 结论的量化式是  $\forall x((Gx \rightarrow Ex) \rightarrow \forall x((Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex)))$ 。推理如下:

- (1) {1}  $\forall x((Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x((Gx \rightarrow Ex) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex)))$   $P_1$
- (2) {1}  $(Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x((Gx \rightarrow Ex) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex))$  (1) $\forall E$
- (3) {2}  $Dx \rightarrow Gx$  Hyp1,x带标记1
- (4) {1,2}  $\forall x((Gx \rightarrow Ex) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex))$  (2)(3) $\rightarrow E$ ,x带标记1
- (5) {1,2}  $(Gx \rightarrow Ex) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex)$  (4) $\forall E$ ,x带标记1
- (6) {3}  $Gx \rightarrow Ex$  Hyp2,x带标记2
- (7) {1,2,3}  $\forall x(Dx \rightarrow Ex)$  (5)(6) $\rightarrow E$ ,x带标记1,2
- (8) {1,3}  $(Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex)$  (3)(7) $\rightarrow I$ ,x带标记2
- (9) {1,3}  $\forall x((Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex))$  (8) $\forall I$ ,x带标记2
- (10) {1}  $(Gx \rightarrow Ex) \rightarrow \forall x((Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex))$  (6)(9) $\rightarrow I$
- (11) {1}  $\forall x((Gx \rightarrow Ex) \rightarrow \forall x((Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex)))$  (10) $\forall I$

这个推理是有效的。

例3是采用谓词自然推理的方法来判定日常推理的有效性的一个例子。同例2一样,这个推理仅仅依靠给定的前提是无法完成推理的,需要引入假设前提。第3行的公式  $Dx \rightarrow Gx$  和第6行的公式  $Gx \rightarrow Ex$  都是引入的假设前提,它们并没有随给定的前提一起出现在公式序列的一开始,而是根据需要出现在推理的过程中。

用自然推理的方法来解决日常推理和证明问题,除了给定的前提外,有时需要引进假设前提。而形式化的自然推理系统最显著的特点就是引入假设前提,自然推理系统内定理的证明需要从假设前提出发。

例4在命题自然推理系统PN中,证明  $\vdash(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

证明:

(1) {1}	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Hyp <sub>1</sub>
(2) {2}	$p \wedge q$	Hyp <sub>2</sub>
(3) {2}	$p$	(2) $\wedge$ E
(4) {2}	$q$	(2) $\wedge$ E
(5) {1, 2}	$q \rightarrow r$	(1)(3) $\rightarrow$ E
(6) {1, 2}	$r$	(4)(5) $\rightarrow$ E
(7) {1}	$(p \wedge q) \rightarrow r$	(2)(6) $\rightarrow$ I
(8) {0}	$\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$	(1)(7) $\rightarrow$ I

例4是命题自然推理系统 $P_N$ 中定理证明的一个例子,这个证明是从第1、2行的假设前提出发的,运用系统内的变形规则,公式系列的最后一个公式便是结论。没有假设前提,自然推理系统中定理的证明就无法开始,更无法进行。

### 3 自然推理系统中的假设前提消去规则

日常生活和工作中的推理和证明解决的是具体的问题,因而推理的结论不能脱离具体的条件而具有普适性。一个可靠的形式系统内的所有定理都是重言式,重言式都是无条件的真命题,所以,自然推理系统中定理的证明虽然需要从假设前提出发,但是证明的结论不能依赖于任何条件。就像几何证明中的辅助线,图形中本来没有那条线,只是为了证明的需要而假设那条线,但结论并不依赖于那条假设的线。例1和例2中的结论前面的大括号里有1、2、3数字,表明结论依赖于前提1、2、3。例3中的结论前面的大括号里有1数字,表明结论依赖于前提1。例4中的结论前面的大括号里的数字是0,表明这个结论不依赖于任何前提,它是命题自然推理系统 $P_N$ 中的一个定理。

自然推理要求假设前提在其完成了使命后,必须被消去,这就涉及到假设前提消去规则。根据大多数逻辑学教科书,假设前提消去规则是说:若从假设前提 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 可以推演出 $B$ ,那么从 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ 可以推演出 $A_n \rightarrow B$ ,并且 $A_n \rightarrow B$ 不依赖于 $A_n$ ,而只依赖于 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ ,此时称假设前提 $A_n$ 被消去了。可依此类推,把所有的假设前提都消去。若一个公式不依赖于任何假设前提,它就是定理。特殊地,如果从 $A$ 可以推演出 $B$ ,那么从空前提可以推演出 $A \rightarrow B$ 。

由定义可知,假设前提消去规则不直接表示前提和结论之间的推理关系,而是说如果 $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ 成立,那么 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$ 也成立。并且假设前提消去规则是与蕴涵引入规则联系在一起的。蕴涵引入规则是指“如果我们假设了 $A$ ,并且能

够从 $A$ 推演出 $B$ ,那么我们就能够得到结论 $A \rightarrow B$ ”。<sup>[6]</sup>蕴涵引入规则“又称条件证明规则或演绎定理,当我们在给定的前提(公式)集 $\Gamma$ 下想推出形如 $A \rightarrow B$ 的结论时,我们就以结论的前件 $A$ 作为一个临时的假设,并和 $\Gamma$ 一起推出 $B$ ,那么,我们就从 $\Gamma$ 推出了 $A \rightarrow B$ 。”<sup>[7]</sup>因此,要想消去假设前提 $A_n$ ,必须运用蕴涵引入规则构造一个蕴涵式,并且这个蕴涵式的前件是假设前提 $A_n$ ,后件 $B$ 是包括假设前提 $A_n$ 在内的公式集 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 的语法后承。例2中第9行的公式 $q$ 是从给定前提1、2、3和假设前提4推演出来的,而假设前提4是 $p$ ,根据假设前提消去规则,在第10行推演出 $p \rightarrow q$ ,此时假设前提4被消去了,结论只依赖于给定的前提1、2、3,而不依赖于假设前提。例3中第7行的公式 $\forall x(Dx \rightarrow Ex)$ 是根据给定前提1和假设前提2、3推演出来的,而假设前提2是 $Dx \rightarrow Gx$ ,根据假设前提消去规则,在第8行推演出 $(Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex)$ ,此时假设前提2被消去了,该公式只依赖于给定的前提1和假设前提3。第9行的公式 $\forall x((Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex))$ 是根据给定前提1和假设前提3推演出来的,而假设前提3是 $Gx \rightarrow Ex$ ,根据假设前提消去规则,在第10行推演出 $(Gx \rightarrow Ex) \rightarrow \forall x((Dx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x(Dx \rightarrow Ex))$ ,此时假设前提3被消去了,该公式只依赖于给定的前提1。例4中第6行的公式 $r$ 是从假设前提1、2推演出来的,而假设前提2是 $p \wedge q$ ,根据假设前提消去规则,在第7行推演出 $(p \wedge q) \rightarrow r$ ,此时假设前提2被消去了,该公式只依赖于假设前提1,而假设前提1是 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ,根据假设前提消去规则,在第8行推演出 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$ ,此时假设前提1被消去了。假设前提1、2都被消去了,公式 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$ 不依赖于任何前提,因此它是命题自然推理系统 $P_N$ 中的一个定理。

运用假设前提消去规则进行推理和证明就是按照“如果 $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ ,那么 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$ ”的规则进行语形变换,这种机械的操作并不难,问题是为什么这样的语形变换就能消去假设前提。这个问题涉及到对前提与结论之间真假制约情况的讨论,属于语义解释的范围。

“结论依赖于假设前提”的意思是结论的真依赖于假设前提的真。如果从假设前提 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 能推演出 $B$ ,那么结论 $B$ 的真要以假设前提 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的真为保证,也就是说,如果假设前提 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是真的,那么结论 $B$ 一定是真的;如果假设前提 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是假的,那么结论 $B$ 可能是真的,也可能是假的,即结论 $B$ 的真得不到保证。

在公式的推演中,  $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ , 当且仅当有以下三种情况:

- (1)  $V(A_1, A_2, \dots, A_n)=1$  且  $VB=1$ ;
- (2)  $V(A_1, A_2, \dots, A_n)=0$  且  $VB=1$ ;
- (3)  $V(A_1, A_2, \dots, A_n)=0$  且  $VB=0$ 。

很显然, 在正确运用变形变换规则从前提  $A_1, A_2, \dots, A_n$  到结论  $B$  的推演中, 如果前提  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是假的, 那么结论  $B$  的真就没有保证; 如果前提  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是真的, 那么结论  $B$  一定是真的, 即结论  $B$  依赖于前提  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 。

例5 在谓词自然推理系统  $Q_N$  中, 证明  $\vdash \forall x (Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\exists x Ax \rightarrow \exists x Bx)$

证明:

- |            |   |                        |
|------------|---|------------------------|
| (1) {1}    | $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$  | Hyp <sub>1</sub>       |
| (2) {2}    | $\exists x Ax$  | Hyp <sub>2</sub>       |
| (3) {2}    | $A \alpha$  | (2) $\exists E$        |
| (4) {1}    | $A \alpha \rightarrow B \alpha$   | (1) $\forall E$        |
| (5) {1, 2} | $B \alpha$  | (3)(4) $\rightarrow E$ |
| (6) {1, 2} | $\exists x Bx$  | (5) $\exists I$        |
| (7) {1}    | $\exists x Ax \rightarrow \exists x Bx$   | (2)(6) $\rightarrow I$ |
| (8) {0}    | $\vdash \forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\exists x Ax \rightarrow \exists x Bx)$ | (1)(7) $\rightarrow I$ |

例5是谓词自然推理系统  $Q_N$  中定理证明的一个例子, 第1行的公式  $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$  和第2行的公式  $\exists x Ax$  都是假设前提, 第3行的公式  $A \alpha$  是从第2个假设前提根据存在量词消去规则而得到的, 因此公式  $A \alpha$  依赖于假设前提2, 公式  $A \alpha$  的真需要假设前提2的真来保证, 如果假设前提2是真的, 那么公式  $A \alpha$  一定是真的; 如果假设前提2是假的, 那么公式  $A \alpha$  的真就得不到保证。第4行的公式  $A \alpha \rightarrow B \alpha$  是从第1行的假设前提根据全称量词消去规则而得到的, 上述的道理适用于它。第5行的公式  $B \alpha$  是从第3行的公式  $A \alpha$  和第4行的公式  $A \alpha \rightarrow B \alpha$  根据蕴涵消去规则而得到, 因此它的真要依赖于公式  $A \alpha$  和公式  $A \alpha \rightarrow B \alpha$  的真, 而公式  $A \alpha$  依赖于假设前提2, 公式  $A \alpha \rightarrow B \alpha$  依赖于假设前提1, 所以公式  $B \alpha$  最终依赖于假设前提1和2。第六行的公式  $\exists x Bx$  是从第5行的公式  $B \alpha$  根据存在量词添加规则而得到的, 因此它的真要依赖于公式  $B \alpha$  的真, 而公式  $B \alpha$  依赖于假设前提1和2, 所以公式  $\exists x Bx$  最终依赖于假设前提1和2。

“结论不依赖于假设前提”的意思是结论的真不依赖于假设前提的真, 也就是说, 结论的真并不要求前提一定是真的。如果从假设前提  $A_1, A_2, \dots, A_n$  能推演出  $B$ , 那么从假设前提  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  能推

演出  $A_n \rightarrow B$ , 这里结论  $A_n \rightarrow B$  的真不依赖于假设前提  $A_n$  的真, 也就是说, 结论  $A_n \rightarrow B$  的真并不要求假设前提  $A_n$  一定是真的。如果结论不依赖于假设前提, 那么假设前提就被消去了。

如果  $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ , 那么  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$ 。这里  $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ , 当且仅当有以下三种情况中的任何一种:

- (I)  $V(A_1, A_2, \dots, A_n)=1$  且  $VB=1$ ;
- (II)  $V(A_1, A_2, \dots, A_n)=0$  且  $VB=1$ ;
- (III)  $V(A_1, A_2, \dots, A_n)=0$  且  $VB=0$ 。

下面讨论(I):

$V(A_1, A_2, \dots, A_n)=1$ , 当且仅当  $V(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})=1$  且  $VA_n=1$ 。因为  $VB=1$ , 所以  $V(A_n \rightarrow B)=1$ 。

下面讨论(II):

$V(A_1, A_2, \dots, A_n)=0$ , 当且仅当有以下三种情况中的任何一种:

- (1)  $V(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})=1$  且  $VA_n=0$ 。因为  $VB=1$ , 所以  $V(A_n \rightarrow B)=1$ ;
- (2)  $V(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})=0$  且  $VA_n=1$ 。因为  $VB=1$ , 所以  $V(A_n \rightarrow B)=1$ ;
- (3)  $V(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})=0$  且  $VA_n=0$ 。因为  $VB=1$ , 所以  $V(A_n \rightarrow B)=1$ 。

下面讨论(III):

$V(A_1, A_2, \dots, A_n)=0$ , 当且仅当有以下三种情况中的任何一种:

- (1)  $V(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})=1$  且  $VA_n=0$ 。因为  $VB=0$ , 所以  $V(A_n \rightarrow B)=1$ ;
- (2)  $V(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})=0$  且  $VA_n=1$ 。因为  $VB=0$ , 所以  $V(A_n \rightarrow B)=0$ ;
- (3)  $V(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})=0$  且  $VA_n=0$ 。因为  $VB=0$ , 所以  $V(A_n \rightarrow B)=1$ 。

以上讨论表明, 按照“如果  $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ , 那么  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$ ”的假设前提消去规则进行推演, 只要前提  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  是真的, 前提  $A_n$  无论取真值还是取假值, 结论  $A_n \rightarrow B$  的值都是真的, 这样, 结论  $A_n \rightarrow B$  的真只依赖于前提  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  的真, 而不依赖于前提  $A_n$ , 即前提  $A_n$  被消去了。

例5中的第7行的公式  $\exists x Ax \rightarrow \exists x Bx$  是从第2行的公式  $\exists x Ax$  和第6行的公式  $\exists x Bx$  根据蕴涵引入规则而得到的, 它是一个形如  $A_n \rightarrow B$  的蕴涵式, 这个蕴涵式的前件  $\exists x Ax$  是假设前提2, 后件  $\exists x Bx$  依赖于假设前提1和假设前提2, 实际上, 这正是运用假设前提消去规则消去假设前提的过程: 如果  $\forall x (Ax \rightarrow Bx)$ ,  $\exists x Ax \vdash \exists x Bx$ , 那么  $\forall x (Ax \rightarrow Bx) \vdash \exists x Ax \rightarrow \exists x Bx$ 。通过这种操作, 消去了假设前提2。

第8行的公式 $\forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\exists xAx \rightarrow \exists xBx)$ 是从第1行的公式 $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ 和第7行的公式 $\exists xAx \rightarrow \exists xBx$ 根据蕴含引入规则而得到的,它也是一个形如 $A_n \rightarrow B$ 的蕴涵式,这个蕴涵式的前件 $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ 是假设前提1,后件 $\exists xAx \rightarrow \exists xBx$ 依赖于假设前提1,实际上,这也是运用假设前提消去规则消去假设前提的过程:如果 $\forall x(Ax \rightarrow Bx) \vdash \exists xAx \rightarrow \exists xBx$ ,那么 $\vdash \forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\exists xAx \rightarrow \exists xBx)$ 。通过这种操作,消去了假设前提1,结论 $\forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\exists xAx \rightarrow \exists xBx)$ 不依赖于任何前提,因此它是谓词自

然推理系统 $Q_N$ 中的一个定理。

#### 4 结语

形式化的自然推理系统最显著的特点就是引入假设前提。由于自然推理的结论不能依赖于假设前提,所以,有假设前提的引入,就有假设前提的消去。运用自然推理的方法进行推理以及在自然推理系统内进行证明定理时,经常会用到假设前提引入规则和假设前提消去规则,因此,正确理解假设前提引入规则和假设前提消去规则有助于我们正确运用它们进行推理和证明。

#### 注释及参考文献:

- [1]陈波.逻辑哲学导论[M].北京:中国人民大学出版社,2002:122.
- [2]彭漪涟,马钦荣主编.逻辑学大辞典[Z].上海:上海辞书出版社,2004:397.
- [3]李娜.现代逻辑的方法[M].开封:河南大学出版社,1997:118.
- [4]黄华新,胡龙彪.逻辑学教程[M].杭州:浙江大学出版社,2000:102.
- [5]陈慕泽,余俊伟.数理逻辑基础:一阶逻辑与一阶理论[M].北京:中国人民大学出版社,2003:52.
- [6]《普通逻辑》编写组.普通逻辑(增订版)[M].上海:上海人民出版社,1993:96.
- [7]何向东主编.逻辑学教程[M].北京:高等教育出版社,2003:59.

## The Rule for Hypotheses and the Rule for Hypotheses Elimination in the System of Natural Inference

WANG Tai-zhong

(Chinese Department, Zhaotong Teacher's College, Zhaotong, Yunnan 657000)

**Abstract:** Hypotheses introduction is the most important characteristic of the system of formalized natural inference. In the natural deduction, the hypothetical premise can be introduced at any time when needed, but it must be eliminated finally because the conclusion can not depend on it. It is a process of syntactic transformation to use the rule for hypotheses elimination to do an inference according to the rule "If  $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ , then  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$ ", but to understand the principle of work of the rule for hypotheses elimination relates to the discussion on the truth-value relation between premise and conclusion, which belongs to the range of semantic interpretation.

**Key words:** Natural deduction; Hypothetical premise; Introduction; Elimination