异面直线距离的方程求法

马玉峰
(甘肃民族师范学院 数学系,甘肃 合作 747000)

【摘　要】本文利用空间平面与空间直线的方程,给出了四种方法来计算异面直线之间的距离。凸显方程的重要性和数学的思维与创新。

【关键词】方程;异面直线;距离
【中图分类号】O182.2 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2012)02-0034-03

1 定义与命题

定义　分别与两条异面直线l_1,l_2垂直相交(即正交)的直线l称为l_1与l_2的公垂线,两垂足的连线段称为公垂线段。

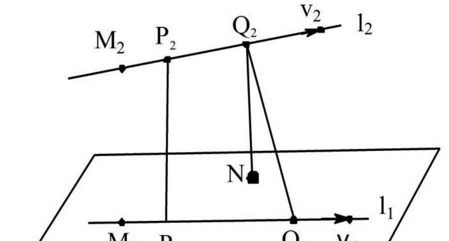
命题1.1　两条异面直线l_1与l_2的公垂线存在且唯一。

证明:存在性。因为$\vec{v_1}$与$\vec{v_2}$不共线,所以$\vec{v_1}$与$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$不共线。于是M_1,$\vec{v_1}$,$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$决定一个平面π_1。同理M_2,$\vec{v_2}$,$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$决定一个平面π_2。因为$\vec{v_1}$与$\vec{v_2}$不共线,因此$\vec{v_1}\times(\vec{v_1}\times\vec{v_2})$与$\vec{v_2}\times(\vec{v_1}\times\vec{v_2})$不共线,而它们分别是$\pi_1$和$\pi_2$的法向量,于是$\pi_1$与$\pi_2$必相交,设交线为l。l的方向向量为:$[\vec{v_1}\times(\vec{v_1}\times\vec{v_2})][\vec{v_2}\times(\vec{v_1}\times\vec{v_2})]$,故这个向量等于$|\vec{v_1}\times\vec{v_2}|^2(\vec{v_1}\times\vec{v_2})$所以$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$就是l的一个方向向量。由于$\vec{v_1}\times\vec{v_2}\perp\vec{v_i}$(i=1,2)有$l\perp l_i$(i=1,2)。

因为l与l_i都在π_i内,且$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$与$\vec{v_i}$不共线,所以l与l_i相交,这表明π_1与π_2的交线l就是l_1与l_2的公垂线。

唯一性。假如l'也是l_1与l_2的公垂线,则l'的方向向量垂直于$\vec{v_i}$ =1,2,从而$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$就是l'的一个方向向量,因为l'在由l_i和$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$决定的平面π_i内,所以l'是π_1与π_2的交线,于是l'与l重合。

命题1.2　两条异面直线l_1与l_2的公垂线段的长就是它们之间的距离。



证明:设P_1P_2是l_1与l_2的公垂线段。在l_i上任取一点Q_i(i=1,2),作出由M_1,$\vec{v_1}$,$\vec{v_2}$决定的平面π,于是公垂线$P_1P_2\perp\pi$。由Q_2作π的垂线,设垂足为N,因为$l_2//\pi$,所以$|P_1P_2|=|Q_2N|$,于是$|Q_2Q_1|\geqslant|Q_2N|=|P_1P_2|$,所以$|P_1P_2|$是$l_1$与$l_2$上的点之间的最短距离。

命题1.3　设两条异面直线l_1,l_2分别过点M_1,M_2,方向向量分别是$\vec{v_1}$,$\vec{v_2}$,则l_1与l_2之间的距离为:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\right|}{\left|\vec{v_1}\times\vec{v_2}\right|}$$

证明:设P_1P_2是l_1与l_2的公垂线段,因为公垂线的方向向量为$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$,所以$\overrightarrow{P_1P_1}//\vec{v_1}\times\vec{v_2}$。
记$\vec{e}=(\vec{v_1}\times\vec{v_2})^0$,则

$$d=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{e}\right|=\left|(\overrightarrow{P_1M_1}+\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2P_2})\cdot\vec{e}\right|$$

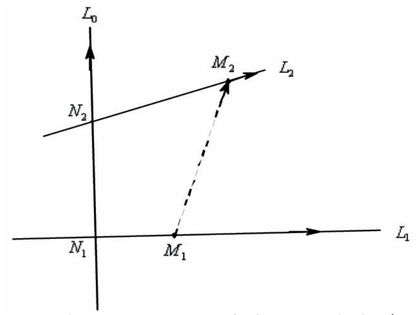
$$=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{e}\right|=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\frac{\vec{v_1}\times\vec{v_2}}{\left|\vec{v_1}\times\vec{v_2}\right|}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{v_1}\times\vec{v_2}\right|}{\left|\vec{v_1}\times\vec{v_2}\right|}$$

它的几何意义是:两条异面直线l_1与l_2之间的距离d等于以$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\vec{v_1}$,$\vec{v_2}$为棱的平行六面体的体积除以以$\vec{v_1}$,$\vec{v_2}$为邻边的平行四边形的面积。

2 距离的求法

设空间两异面直线的方程分别是:

$l_1:\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}$和$l_2:\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}$,求它们之间的距离。



方法一、(Prj法——正交投影法)在直线L_1上任意取一点M_1,在直线L_2上任意取一点M_2,设$\vec{v_1}$,$\vec{v_2}$分别是L_1和L_2的方向向量,则公垂线L_0的方向向量

收稿日期:2012-03-28
作者简介:马玉峰(1966-),男,甘肃天水人,副教授,研究方向:线性代数、空间解析几何。

为:$\overrightarrow{v_0}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$,所求距离是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在公垂线上的射影长。

即$d=\left|\Pr j_{\dot{v_1}\times v_2}\overrightarrow{M_1M_2}\right|$

而$\Pr j_{\overline{v_1}\times\overline{v_2}}\overrightarrow{M_1M_2}=\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})}{\left|\dot{v_1}\times v_2\right|}$所以

$$d=\left|\Pr j_{\dot{v_1}\times v_2}\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})}{\left|\dot{v_1}\times\dot{v_2}\right|}$$

$$=\frac{\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y\end{vmatrix}^2}}=\frac{V_{平六}}{S_{平四}}$$

方法二、(LM法——线面法)作平面π使得它通过L_1且垂直于L_0,利用平面的点法式得方程:

$$\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}(x-x_1)+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X & Y_2\end{vmatrix}(z-z_1)=0$$

计算直线L_2上的点到平面π的距离,即

$$d_{(L2,\pi)}=\frac{\left|[(x_2-x_1)\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}+(y_2-y_1)\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}+(z_2-z_1)\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}]\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y\end{vmatrix}^2}}$$

$$=\frac{\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y\end{vmatrix}^2}}$$。(用到行列式的性质)

方法三、(MM法——面面法)作两平面π_1,π_2。使π_1过L_1且垂直于L_0;使π_2过L_2且垂直于L_0,然后计算两平行平面之间的距离。

由于π_1的方程是:

$$\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}(x-x_1)+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X & Y_2\end{vmatrix}(z-z_1)=0$$

π_2的方程是:

$$\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}(x-x_2)+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}(y-y_2)+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X & Y_2\end{vmatrix}(z-z_2)=0$$

因此

$$d_{(\pi_1-\pi_2)}=\frac{\left|D_2-D_1\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y\end{vmatrix}^2}}$$

其中

$$D_2=-(x_2\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}+y_2\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}+z_2\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix})$$

$$D_1=-(x_1\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}+y_1\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix})$$

与以上两结果完全相等。

方法四、($\dfrac{\partial}{\partial f}$法——偏导数法)由于直线$L_1$的坐参方程是:$\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}=t$;

直线L_2的坐参方程是:$\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}=u$

在直线L_1上任意取一点$M_1(x_1+tX_1, y_1+tY_1, z_1+tZ_1)$,在直线$L_2$上任意取一点

$M_2(x_2+uX_2, y_2+uY_2, z_2+uZ_2)$,则这两点之间的距离平方是:

$d^2_{(M_1-M_2)}=(x_2-x_1+uX_2-tX_1)^2+(y_2-y_1+uY_2-tY_1)^2+(z_2-z_1+uZ_2-tZ_1)^2$

令$f(u,t)=(x_2-x_1+uX_2-tX_1)^2+(y_2-y_1+uY_2-tY_1)^2+(z_2-z_1+uZ_2-tZ_1)^2$

求$\dfrac{\partial f}{\partial u}=0,\dfrac{\partial f}{\partial t}=0$得驻点,然后求这个二次函数的最小值即可。特举一例说明。

结论的应用

例:设$l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}, l_2:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$,是两异面直线,求它们之间的距离。

解:在直线L_1上任意取一点$M_1(1+t, 2t, -1-t)$在直线L_2上任意取一点$M_2(-2-2u, 1, u)$,

则$d^2_{(M_1-M_2)}=(3+t+2u)^2+(2t-1)^2+(t-1-u)^2$,

令$f(u,t)=(3+t+2u)^2+(2t-1)^2+(t-1-u)^2$有:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial t}=12t+2u=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial u}=t+9u+14=0\end{cases}\text{解得}\begin{cases}u=-\dfrac{42}{29}\\ t=\dfrac{7}{29}\end{cases}$$

知$f(u,t)=(\dfrac{10}{29})^2+(-\dfrac{15}{29})^2+(\dfrac{20}{29})^2=\dfrac{725}{29^2}$

$\therefore d=\sqrt{f(u,t)}=\sqrt{\dfrac{725}{29^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$。若用前三种方法结果完全以一样,这里不赘述。

3 结束语

利用方程计算空间异面直线之间的距离,使"形与数"结合得到充分体现,完美地反映了数学图形与方程间的内在关系,进而为问题的研究提供了方法。

注释及参考文献:

[1]陈兰祥.高等数学典型题精解(第四版)[M].北京:学苑出版社,2000.10.

[2]同济大学数学组.高等数学解题方法与同步训练[M].上海:同济大学出版社,1998.1.

[3]张景中.绕来绕去的向量法[M]. 北京:科学出版社,2010.9.
[4]尤承业.解析几何[M]. 北京: 北京大学出版社,2004.1.
[5]钱宝康等译编.向量代数与空间解析几何解题指导[M].广东:华南工学院出版社,1987.4.
[6]丘维声.解析几何(第二版)[M].北京:北京大学出版社,2001.8.

Equation Method for Coplanar Straight Line Distance

MA Yu-feng
(Gansu Normal University for Nationalities, Hezuo, Gansu 747000)

Abstract: This paper using the space plane and space linear equations presented four methods to calculate the distance between the bifacial straight line, highlighting the importance of the equations and mathematical thinking and innovation.

Key words: Equation; Coplanar line; Dstance

(上接33页)

The Cordiality of Graphs in Terms of C(2m,2)

REN Jun-feng[1], WANG Ping[2]
(1.School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454000;
2.Jiaozuo Professional Education Center School, Jiaozuo, Henan 454000)

Abstract: By the definition of Cordial graph, this paper discussed the cordiality of C(2m,2), C(2m,2)+G, C(2m,2) $\times P_n$, and gave the cordial labels of these graphs.

Key words: Cordial graph; Cordial label; Circular graph; Path; Cartesian product