与C(2m,2)有关图的Cordial性*

任俊峰[1],王 萍[2]
(1.河南理工大学 数学与信息科学学院,河南 焦作 454000;2.焦作市职业教育中心学校,河南 焦作 454000)

【摘 要】根据cordial图的定义,研究了C(2m,2),C(2m,2)+G,以及C(2m,2)×P_n的Cordial性,并给出了相应的Cordial标号。

【关键词】Cordial图;Cordial标号;循环图;路;笛卡尔积
【中图分类号】O157.5 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2012)02-0031-03

1 引言

自Cahit[1]在1987年提出图的Cordial性以来,这一课题受到国内外学者的广泛关注。近年来,部分学者较为集中的讨论了一些简单连通图的Cordial性,并给出了一些Cordial图类,可参见文献[2-8],本文就循环图C(2m,2)以及与之相关图的Cordial性展开讨论。

2 相关符号及定义

文中涉及的图均为有限无向简单连通图,未说明的概念与术语均同文献[9]。设f是图G的一个0-1标号,即$\forall\ \nu\in V(G)$,$f(\nu)\in\{0,1\}$,以$f(u\nu)=|f(u)-f(\nu)|$导出G的边标号。记$V_0=V_0(G)=\{\nu\mid f(\nu)=0\}$,$V_1=V_1(G)=\{\nu\mid f(\nu)=1\}$,$E_0=E_0(G)=\{u\nu\mid u\nu\in E(G),f(u\nu)=0\}$,$E_1=E_1(G)=\{u\nu\mid u\nu\in E(G),f(u\nu)=1\}$,对于任意有限集X,|X|表示其元素的个数。

循环图C(l,2)(l=4,5,…)表示由圈$C_l(\nu_1\nu_2\cdots\nu_l\nu_1)$增加边$\nu_i\nu_{i+2}$(i=1,2,…,l,i+2(modl))所得到的图,易知循环图C(l,2)中所有顶点均为4度点,本文所讨论的循环图均为顶点数l≥4的图。

定义1 如果对于图G存在一个标号f,使得$\|V_0(G)|-|V_1(G)\|\leq1$及$\|E_0(G)|-|E_1(G)\|\leq1$,则称G是Cordial图,f是G的一个Cordial标号。

设G和H是给定的两个图,$V(G)=\{u_i\mid i=1,2,\cdots,|V(G)|\}$,$V(H)=\{w_j\mid j=1,2,\cdots,|V(H)|\}$。

用G×H来表示G与H的笛卡尔积图,其点集$V(G\times H)=V(G)\times V(H)$,边集$E(G\times H)=\{\{(u_i,w_j),(u_m,w_n)\}\mid u_i=u_m$且$w_jw_n\in E(H)$或者$w_j=w_n$且$u_iu_m\in E(G)\}$,为方便起见,本文记$\nu_{i,j}=(u_i,w_j)\in V(G\times H)$,则边$\{(u_i,w_j),(u_m,w_n)\}$可记为$\nu_{i,j}\nu_{m,n}$。

例如C(6,2)×P_n顶点标记如图1所示:

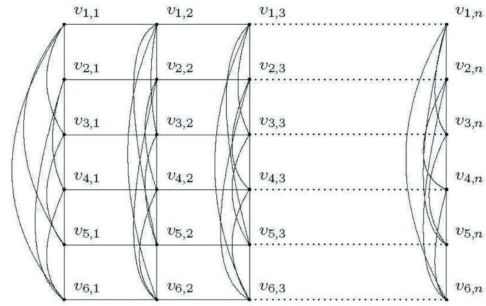

图1

另外,利用矩阵来表示笛卡尔积图的标号,例如,C(2m,2)×P_n的标号可用矩阵$A_{2m\times n}=(a_{ij})$来表示,其中$f(\nu_{i,j})=a_{ij}$,称矩阵$A_{2m\times n}$为C(2m,2)×P_n的点标号矩阵。

定义2 若图G与H互不相交,则图G+H由图G∪H通过连接G的每个顶点和H的每个顶点而获得,即

$V(G+H)=V(G)\cup V(H)$,$E(G+H)=E(G)\cup E(H)\cup E(GH)$

其中$E(GH)\{u\nu\mid u\in V(G),\nu\in V(H)\}$,称图G+H为图G与H的和。

3 主要结论及其证明

定理1 循环图C(2m+1,2)不是Cordial图,而循环图C(2m,2)是Cordial图。

证明 反证法。设循环图C(2m+1,2)是Cordial图,因为$|E(C(2m+1,2))|=4m+2$,所以$|E_1(C(2m+1,2))|=|E_0(C(2m+1,2))|=2m+1$,在$E_1(C(2m+1,2))$中,每条边都有且仅有一个端点是0顶点,而在$E_0(C(2m+1,2))$中,若两端点都是0顶点的边有x条,则C(2m+1,2)中所有0顶点度的和满足:

$2x+2m+1=4|V_0|$

上式左端为奇数,右端为偶数,显然为矛盾式。所以假设不成立,循环图C(2m+1,2)不是

收稿日期:2012-03-24
*基金项目:河南理工大学青年基金(Q2009-23),河南理工大学运筹学与控制论校级重点学科资助,河南理工大学应用数学省级重点学科资助。
作者简介:任俊峰(1983-),男,河南温县人,讲师,硕士研究生,主要从事图论及其应用研究。

Cordial图。

对于循环图C(2m,2)，给出其2m个顶点标号为(1,0,1,0,…,1,0)，易知该标号为Cordial标号，故循环图C(2m,2)是Cordial图。

定理2　若图G是任意一个Cordial图，则C(2m,2)+G也是Cordial图。

证明　由定理1的证明知，循环图C(2m,2)是Crodidal图，则在C(2m,2)的任意一个Cordial标号下，有$|V_0(C(2m,2))|=|V_1(C(2m,2))|=m$，$|E_0(C(2m,2))|=|E_1(C(2m,2))|=2m$。

图G也是一个Cordial图，则也存在一个Cordial标号，使$\|V_0(G)|-|V_1(G)\|\leqslant 1$，$\|E_0(G)|-|E_1(G)\|\leqslant 1$。保持C(2m,2)和G的Cordial标号不变，对其进行和的运算，生成新图C(2m,2)+G。则在新图C(2m,2)+G中，图G中的任意一点均与C(2m,2)中的m个0顶点和m个1顶点相连，由此产生的新边中0边的数目等于1边的数目，根据定义2易知C(2m,2)+G具备Cordial性，也是Cordaial图。

引理1　$C(2m,2)\times P_{2t+1}$(其中$m\geqslant 2, t\geqslant 0$)是Cordial图。

证明　当t=0时，$C(2m,2)\times P_1$与C(2m,2)同构，是Cordial图；

当m=2，t=1时，可取$C(4,2)\times P_3$的标号为$\begin{pmatrix}111\\100\\100\\001\end{pmatrix}$；

当m=2，t=2r(r=1,2,…)时，可取$C(4,2)\times P_{4r+1}$的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c|c}\begin{array}{ccc}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{array} & \underbrace{\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{array}\Bigg|\cdots\Bigg|\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{array}}_{(r-1)组} & \begin{array}{cc}1&1\\1&1\\0&0\\0&0\end{array}\end{array}\right)$$

；当m=2，t=2r+1(r=1,2,…)时，可取$C(4,2)\times P_{4r+3}$的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c}\begin{array}{ccc}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{array} & \underbrace{\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{array}\Bigg|\cdots\Bigg|\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{array}}_{r组}\end{array}\right)$$

当m>2，t=2r(r=1,2,…)时，可取$C(2m,2)\times P_{4r+1}$的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c}\begin{array}{c}1\\0\\1\\0\\\vdots\\1\\0\end{array} & \underbrace{\begin{array}{cccc}0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{array}\Bigg|\cdots\Bigg|\begin{array}{cccc}0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{array}}_{r组}\end{array}\right)_{2m\times(4r+1)};$$

当m>2，t=2r+1(r=0,1,2…)时，可取$C(2m,2)\times P_{4r+3}$的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c|c}\begin{array}{c}1\\0\\1\\0\\\vdots\\1\\0\end{array} & \underbrace{\begin{array}{cccc}0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{array}\Bigg|\cdots\Bigg|\begin{array}{cccc}0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{array}}_{r组} & \begin{array}{cc}0&0\\1&1\\0&0\\1&1\\\vdots&\vdots\\0&0\\1&1\end{array}\end{array}\right)_{2m\times(4r+3)}$$

易验证，以上标号皆为Cordial标号，引理得证！

引理2　$C(2m,2)\times P_2$(其中$m\geqslant 2$)是2m阶循环图C(2m,2)与2阶路P_2的笛卡尔积图。当m=2k+1(k=1,2,…)时，$C(2m,2)\times P_2$不是Cordial图；当m=2k(k=1,2,…)时，$C(2m,2)\times P_2$是Cordial图。

证明　当m=2k+1(k=1,2,…)时，2m=4k+2，假设$C(4k+2,2)\times P_2$是Cordial图。由于$|E(C(4k+2,2)\times P_2)|=2\times 2\times(4k+2)+(4k+2)=20k+10$，则必有$|E_0(C(4k+2,2)\times P_2)|=|E_1(C(4k+2,2)\times P_2)|=10k+5$，若在$C(4k+2,2)\times P_2$中，两端点都是0顶点的边有x条，而$|V_0(C(4k+2,2)\times P_2)|=|V_1(C(4k+2,2)\times P_2)|=4k+2$，图中所有点均为5度点，则$C(4k+2,2)\times P_2$中所有0顶点度的和满足：

$$2x+10k+5=(4k+2)\times 5=20k+10$$

从而2x=10k+5，易知此为矛盾式，故假设不成立，$C(4k+2,2)\times P_2$不是Cordial图。

当m=2k(k=1,2,…)时，2m=4k，分情况依次给出$C(4k,2)\times P_2$的标号如下：

当k=1，2m=4时，可取$C(4k,2)\times P_2$的标号为

$$\begin{pmatrix}1100\\1100\end{pmatrix}^T$$

当k=2r(r=1,2,…)，2m=8r时，可取$C(8r,2)\times P_2$的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}0111&\cdots&0111\\1101&&1101\end{matrix}}_{r组} & \underbrace{\begin{matrix}0100&\cdots&0100\\0001&&0001\end{matrix}}_{r组}\end{array}\right)^T$$

当k=2r+1(r=1,2,…)，2m=8r+4时，可取$C(8r+4,2)\times P_2$的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}\begin{matrix}11\\01\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}0111&\cdots&0111\\1101&&1101\end{matrix}}_{r组} & \underbrace{\begin{matrix}0100&\cdots&0100\\0001&&0001\end{matrix}}_{r组} & \begin{matrix}01\\00\end{matrix}\end{array}\right)^T$$

易验证，以上标号皆为Cordial标号，所以当m=2k(k=1,2,…)时，$C(2m,2)\times P_2$即$C(4k,2)\times P_2$是Cordial图。

引理3　$C(2m,2)\times P_{2t}$(其中$m\geqslant 2, t\geqslant 2$)是Cordial图。

证明　当m=2，t=2r（r=1，2，…）时，取C(4，2)×P_{4r}的标号为

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1111 & & 1111\\ 1100 & \cdots & 1100\\ 0000 & & 0000\\ 0011 & & 0011\end{matrix}}_{r组}\right);$$

当m=2，t=2r+1（r=1，2，…）时，取C(4，2)×P_{4r+2}的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1111 & & 1111\\ 1100 & \cdots & 1100\\ 0000 & & 0000\\ 0011 & & 0011\end{matrix}}_{r组} & \begin{matrix}11\\11\\00\\00\end{matrix}\end{array}\right);$$

当m=3k，t=2r（k，r=1，2，…）时，可用k行r列的分块矩阵表示C(6k，2)×P_{4r}的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c}A & \underbrace{\begin{matrix}B & & B\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ B & & B\end{matrix}}_{r-1列}\\ \vdots & \\ A & \end{array}\right)_{k\times r},\quad 其中\ A=\begin{pmatrix}1001\\1100\\1000\\0111\\0011\\0101\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1001\\0110\\0110\\1001\\1001\\1001\end{pmatrix};$$

当m=3k，t=2r+1（k，r=1，2，…）时，可用k行r+1列的分块矩阵表示C(6k，2)×P_{4r+2}的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c|c}\begin{matrix}A\\ \vdots\\ A\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}B & & B\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ B & & B\end{matrix}}_{r-1列} & \begin{matrix}C\\ \vdots\\ C\end{matrix}\end{array}\right)_{k\times(r+1)},\quad 其中\ C=\begin{pmatrix}10\\01\\01\\10\\10\\10\end{pmatrix};$$

当m=3k+1，t=2r（k，r=1，2，…）时，可用k+1行r列的分块矩阵表示C(6k+2，2)×P_{4r}的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}A\\ \vdots\\ A\\ D\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}B & \cdots & B\\ \vdots & & \vdots\\ B & \cdots & B\\ F & \cdots & F\end{matrix}}_{r-1列}\end{array}\right)_{(k+1)\times r},\quad 其中D=\begin{pmatrix}1100\\1001\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}0000\\1111\end{pmatrix};$$

当m=3k+1，t=2r+1（k，r=1，2，…）时，可用k+1行r+1列的分块矩阵表示C(6k+2，2)×P_{4r+2}的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c|c}\begin{matrix}A\\ \vdots\\ A\\ D\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}B & \cdots & B\\ \vdots & & \vdots\\ B & \cdots & B\\ F & \cdots & F\end{matrix}}_{r-1列} & \begin{matrix}C\\ \vdots\\ C\\ G\end{matrix}\end{array}\right)_{(k+1)\times(r+1)},其中G=\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix};$$

当m=3k+2，t=2r（k，r=1，2，…）时，可用k+1行r列的分块矩阵表示C(6k+4，2)×P_{4r}的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}A\\ \vdots\\ A\\ H\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}B & \cdots & B\\ \vdots & & \vdots\\ B & \cdots & B\\ J & \cdots & J\end{matrix}}_{r-1列}\end{array}\right)_{(k+1)\times r},其中H=\begin{pmatrix}0111\\0010\\1100\\1001\end{pmatrix},J=\begin{pmatrix}1001\\0110\\0000\\1111\end{pmatrix};$$

当m=3k+2，t=2r+1（k，r=1，2，…）时，可用k+1行r+1列的分块矩阵表示C(6k+4，2)×P_{4r+2}的标号为

$$\left(\begin{array}{c|c|c}\begin{matrix}A\\ \vdots\\ A\\ H\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}B & \cdots & B\\ \vdots & & \vdots\\ B & \cdots & B\\ J & \cdots & J\end{matrix}}_{r-1列} & \begin{matrix}C\\ \vdots\\ C\\ K\end{matrix}\end{array}\right)_{(k+1)\times(r+1)},其中K=\begin{pmatrix}10\\01\\00\\11\end{pmatrix};$$

易验证，以上标号皆为Cordial标号，引理得证！

由引理1，2，3得出定理3如下：

定理3　当m=2k+1（k=1，2，…），n=2时，C(2m，2)×P_n不具备Cordial性，即C(4k+2，2)×P_2不是Cordial图，反之，C(2m，2)×P_2(其中m≥2，n≥1)是Cordial图。

注释及参考文献：

[1]Cahit I.Cordial graph：A weaker Version of graceful and harmonious Graphs[J].Ars combinatoria，1987，23：201-208.

[2]堵根民.完全k部图和一些特殊图的Cordial性[J].内蒙古师大学报（自然科学汉文版），1997(2)：9-12.

[3]马黎政，刘峙山，陈丽娜.$\bigcup_{i=1}^{r}(P_{m_i}\times P_{n_i})$的cordial性[J].延边大学学报（自然科学版），2008，34(2)：99-101.

[4]堵根民.轮族的cordial性问题[J].内蒙古师大学报（自然科学汉文版），2008，37(2)：180-184.

[5]刘峙山，堵根民.三正则连通图的Cordial性[J].数学研究，2007，40(1)：114-116.

[6]Xie Yan-tao，Che Ying-tao，Liu Zhi-shan.The Cordiality on the Union of 3-regular Connected Graph and Cycle[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2010，25(2)：244-248.

[7]温一慧.广义轮图的友好性[J].兰州大学学报（自然科学版），2008，44(3)：103-108.

[8]陈丽娜，刘峙山.一类图的Cordial性[J].数学研究，2007，40(4)：447-451.

[9]Bondy J A，Murty U S R.Graph Theory with Applications[M].New York，North Holland，1976.

（下转36页）

[3]张景中.绕来绕去的向量法[M]. 北京:科学出版社,2010.9.
[4]尤承业.解析几何[M]. 北京: 北京大学出版社,2004.1.
[5]钱宝康等译编.向量代数与空间解析几何解题指导[M].广东:华南工学院出版社,1987.4.
[6]丘维声.解析几何(第二版)[M].北京:北京大学出版社,2001.8.

Equation Method for Coplanar Straight Line Distance

MA Yu-feng
(*Gansu Normal University for Nationalities, Hezuo, Gansu 747000*)

Abstract: This paper using the space plane and space linear equations presented four methods to calculate the distance between the bifacial straight line, highlighting the importance of the equations and mathematical thinking and innovation.

Key words: Equation; Coplanar line; Dstance

(上接33页)

The Cordiality of Graphs in Terms of C(2m,2)

REN Jun-feng[1], WANG Ping[2]
(*1.School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454000;*
2.Jiaozuo Professional Education Center School, Jiaozuo, Henan 454000)

Abstract: By the definition of Cordial graph, this paper discussed the cordiality of $C(2m,2)$, $C(2m,2)+G$, $C(2m,2)\times P_n$, and gave the cordial labels of these graphs.

Key words: Cordial graph; Cordial label; Circular graph; Path; Cartesian product