

浅析立体角在物理问题中的应用

马 健

(西南民族大学 电气信息工程学院, 四川 成都 610041)

【摘 要】本文介绍了立体角的概念,并通过举例说明了立体角在一些物理问题研究中的作用。

【关键词】立体角;高斯定理;电场力;万有引力

【中图分类号】044 **【文献标识码】**C **【文章编号】**1673-1891(2010)03-0119-02

1 问题的提出

在目前国内使用的许多大学物理教材中^[1-4],大都会在电学部分安排这样一道例题或习题:设有一半半径为 R ,均匀带电量为 Q 的球体,如图1(a),求该球体内部和外部的电场强度。

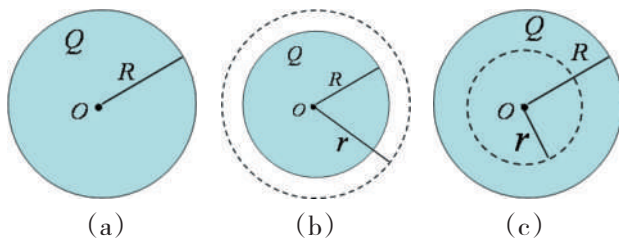


图1

对于该题目的求解,一般采用高斯定理。结合对该带电体系的对称性分析(略),可在带电球体内、外分别作出以 O 为圆心,半径为 r 的球面作为高斯面,如图1(b)、图1(c)中的虚线。无论是研究图1(b),还是图1(c),对两个不同区域中的高斯面求电通量均有:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E \quad (1)$$

由高斯定理,当 $r > R$ 时,

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2)$$

当 $r < R$ 时,

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3} \quad (3)$$

于是可求出带电球体内、外的电场强度大小分别为 $E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ 和 $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。

整个运算过程没有什么难度,但在教学过程中发现,学生在解答这道题目时,总在一个问题上充满顾虑。那就是对图1(b)和图1(c)两图中的高斯面求电通量时,为何均有 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E$? 两图中的两个高斯面是有差异的:图1(b)中的高斯面的外部没有电荷分布,而图1(c)中高斯面的外部尚有电

荷分布于厚度为 $R-r$ 的球壳区域。为什么认为在这两种情况下对高斯面的对称性分析均一样,对高斯面求出的电通量形式上都一样呢?

如果知道立体角的概念,这一问题是不难解答的。

2 立体角的概念

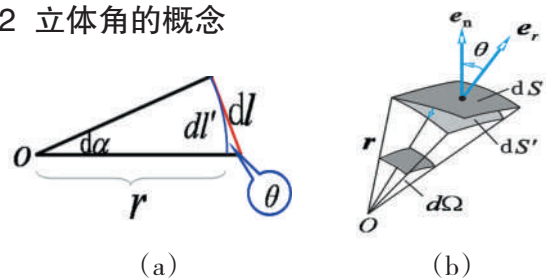


图2

立体角的概念是对平面几何中的平面角在三维空间的推广。如图2(a)所示,二维空间内一段线元 dl 对 O 点所张的平面角为 $d\alpha$,如果我们作以 O 为圆心, r 为半径的圆弧,显然会有:

$$d\alpha = \frac{dl'}{r} = \frac{dl \cos \theta}{r} \quad (4)$$

其中 dl' 是线元 dl 在圆弧方向上的投影, θ 是 dl' 与 dl 之间的夹角。

同样道理,如图2(b)所示,三维空间中一个面元 dS 对点 O 所张的“圆锥顶”被定义为立体角 $d\Omega$,并且有:

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (5)$$

其中 e_n 是面元 dS 的法线方向单位矢, e_r 是从 O 点指向 dS 的位置矢量 r 的单位矢,以 O 为球心作半径为 r 的球面, dS' 是 dS 在该球面上的投影。

3 用立体角来回答第一个问题

首先解决一个与之相近的问题,一个半径为 R ,均匀带电量为 Q 的球面内部的电场强度是多少?

如图3,电量 Q 均匀分布于球面上,则球面上的电荷面密度为 $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ P 为带电球面内任意一点。以 P 点为顶点,沿相反方向“射出”两个圆锥,这

两个圆锥在球面上截出两个面元 dS_1 和 dS_2 。

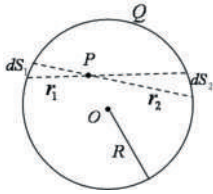


图3

面元 dS_1 和 dS_2 面积趋于零, 可视为电量分别为 σdS_1 和 σdS_2 的点电荷, 它们到 P 点的距离分别为 r_1 和 r_2 , 于是面元 dS_1 上电荷在 P 点产生的电场强度大小为:

$$E_1 = \frac{\sigma dS_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \tag{6}$$

面元 dS_2 上电荷在 P 点产生的电场强度大小为:

$$E_2 = \frac{\sigma dS_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \tag{7}$$

考虑到 $\frac{dS_1}{r_1^2}$ 与 $\frac{dS_2}{r_2^2}$ 正好是面元 dS_1 和 dS_2 分别对 P 点所张的立体角, 而且 $\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$ (类似平面几何中的对顶角), 显然 E_1 与 E_2 大小相等、方向相反, 故这对带电面元 dS_1 和 dS_2 在 P 点产生的电场叠加后为零。同理, 在该带电球面上可找出无穷对这样的带电面元, 它们在 P 点产生的电场总是相互抵消, 因此 P 点处的总电场强度为 0。由于 P 点的任意性, 因此可得到结论: 均匀带电球面上的电荷在球面内任意位置产生的总电场强度为零。如果在该球面内还有其它电荷, 那么该带电球面是不会对其面内的其它电荷有电场力作用的。

回到最初的问题 1, 图 1(c) 的高斯面作在均匀带电球体的内部 ($r < R$), 虽然该高斯面的外部有一厚度为 $R-r$ 的带电球壳, 但若将带电球壳看作一系列半径从 r 变化到 R 的若干同心带电球面, 显然这一系列带电球面对图 1(c) 的高斯面内部区域是不产生电场的。换言之, 图 1(c) 的高斯面内部区域的电场与厚度为 $R-r$ 的带电球壳无关。因此, 图 1(c) 与图 1(b) 的高斯面虽然作在不同区域, 但两个区域高斯面上的电场强度只与高斯面包围的电荷有关, 故而这两个区域的电场的对称性分析是一致的, 对这两个区域的高斯面求电通量所得的结果也一样:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E \text{ 这正是库仑定律平方反比律的必然结果。}$$

4 拓展——地心是失重的吗

很多人都看过大科幻小说家凡尔纳写的《地心

游记》^[9], 沉溺于其中奇幻的冒险, 并对地心的景色充满好奇。然而真实的地心可比小说更加神奇。

由于两个质点间的万有引力与两个点电荷间的库仑电场力形式上高度相似, 均满足平方反比律, 因此对电场的讨论对于引力场也有近似的结论。如果把图 3 的问题改为一个半径为 R , 质量分布均匀的球面, 并给出引力场强的定义 (类似于电场强度, 是空间某点处单位质量的质点所受的万有引力), 那么类似的讨论会得到这样的结果: 一个质量分布均匀的球面对其内部任意点的引力场强为零。这就意味着如果该球面内还有其它质量体系的话, 该球面对其面内的其它质量体系的万有引力为零。同样, 若把图 1(c) 看做是一个半径为 R , 质量均匀分布的球体, 那么图中半径为 r 的球面上各处的引力场强只与半径为 r 的球面所包围的质量有关, 而与厚度为 $R-r$ 的球壳的质量无关。如果 r 越小则包围的质量越少, 则越接近球心的位置的引力场强也就越小。当考察球心 O 时, 会得出该质量均匀分布的球体对其自身球心的引力场强为零的结论。我们可以想象这样一个有趣的问题: 假若把地球看作是一个均匀固态球体, 假若人类能以某种方式到达地心, 那么在抵达地心的过程中, 观察员会感觉到来自地球的引力在减小, 当其到达地心时会完全摆脱地球引力的吸引。我们知道一个物体要摆脱另一个物体的吸引, 只需要让二者之间的距离足够远即可。而立体角的推导告诉我们, 原来摆脱吸引并不一定非要跑到无限远。因为在一个有质量的物体的内部一定存在着一个位置, 这个物体的引力在该位置是“失效”的。推而广之, 即便这个物体的质量分布是不均匀的、形状也是不规则的, 在其内部也一定有对自身引力完全失效的位置, 只不过此时这个位置并不在其几何中心。

5 总结

本文所讨论的物理问题虽然简单, 但学生在初学时却常常搞不清楚, 或知其然不知其所以然。究其原因, 大约是没有掌握立体角这一数学概念。可见数学知识在物理学习中的重要性。

在大学物理的教学过程中, 老师强调学习物理的关键是把握物理概念、建立物理图像、确定物理模型, 但是, 也应该培养学生用数学知识解决物理问题的能力。有时, 老师还应当教学中针对性地适当补充相关数学知识。毕竟, 无论是简单的, 还是复杂的物理问题最终总是通过数学的语言来展现的。

注释及参考文献:

- [1]严志光.上海汽车维修业现状和加快发展对策[J].汽车与配件,2005(19):36-38.
- [2]杨雷,赵云波.云南汽车维修行业人才现状分析与对策[J].昆明冶金高等专科学校学报,2009(5):96-98.
- [3]段兴华,吕云飞.汽车技术服务与营销人才市场需求分析[J].商场现代化,2006(24):148-149.
- [4]廖燕.汽车服务人才需求研究[J].上海汽车,2008(4):34-38.

On the Vehicle Maintenance Talents Training in Liangshan Prefecture

LIU Ping, LIU Ya-ping

(Xichang College, Xichang, Sichuan 615013)

Abstract: In Liangshan Prefecture maintenance enterprise, vehicle maintenance staff is little educational, and maintenance engineers and technicians are less. The mode of “Masters training their apprentices” is still the main mode to train vehicle maintenance staff so that vehicle maintenance staff is extremely scarce. For this status quo, the local government should enact relevant policies to create a good environment to supply talents; enterprises should change their concepts, taking talents as enterprises’ fundamentality and attaching much importance to talents introduction and training; being based on and serving the local areas, the local high schools should carry out multilayer talents training mode of undergraduate education, order training, on-the-job training and so on, and should go all out to train new knowledgeable, specialized, standardized and informationalized vehicle maintenance talents.

Key words: Liangshan prefecture; Maintenance talents; The status quo; Countermeasures

(上接120页)

注释及参考文献:

- [1]张三慧.大学物理学(电磁学)(第三版)[M].北京:清华大学出版社,2008:20-21.
- [2]程守洙,江之永.普通物理学2(第五版)[M].北京:高等教育出版社,1998:38-39.
- [3]王楚,李椿,周乐柱.基础物理教程(电磁学)[M].北京:北京大学出版社,2000:50-51.
- [4]徐行可,张晚,张庆福.物理学概论(上)[M].成都:西南交通大学出版社,2002:175-176.
- [5]凡尔纳.地心游记[M].南京:译林出版社,2008.

A Brief Analysis of the Application of Stereoangle in Physics

MA Jian

(College of Electrical & Information Engineering, Southwest University for Nationalities, Chengdu, Sichuan 610041)

Abstract: This paper introduces the conception of stereoangle and explains the application of stereoangle in physics with examples.

Key words: Stereoangle; Gauss theorem; Electric force; Gravitational force