

正弦交流电激励下一阶RC电路中的位移电流浅析

周继芳

(成都医学院 物理教研室, 四川 成都 610081)

【摘要】根据Maxwell理论,对正弦交流电源激励下一阶RC电路中的位移电流进行了分析。以平行板电容器为例,给出了电容器两极板间的位移电流的理论分析,导出了导线中的位移电流表达式,并对回路中出现过电压、过电流以及稳态时导线中的位移电流进行了讨论。

【关键词】RC电路;位移电流;过电压;过电流

【中图分类号】TM86 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2010)03-0026-03

引言

由于根据静磁学推导出的公式 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$ (\vec{j} 为传导电流密度)不适用于时变电场,Maxwell赞同了Faraday关于“变化的电场也应产生变化的磁场”的猜想^[1],并借助“以太”模型^[2],提出了位移电流的概念,建立了普适方程^[3]:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

其中, \vec{H} 为磁场强度, \vec{j}_c 为传导电流密度或运流电流密度, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 为位移电流密度。

位移电流密度并不代表电荷的运动,在本质上它反映了电场的变化,因而位移电流跟传导电流有着本质的区别,前人对位移电流密度的引入、定义及由该定义所表达的物理实质、位移电流与传导电流的区别等都有较详细的讨论^[4-9]。尤其是文献[10-17]的讨论,使人们对位移电流的磁效应有了更深刻的认识。

电容器是电工和无线电技术中的重要元件之一,当电容器接在交流电路中时,根据Maxwell假设,电容器极板间中断了的传导电流,将由位移电流接替下去,从而保持了电流在电容器两极板间的连续性^[18]。本文将从几个方面在理论上对正弦交流电源激励下RC电路中的位移电流进行探讨。

1 正弦交流电源激励下一阶RC电路中电容器极板间的位移电流

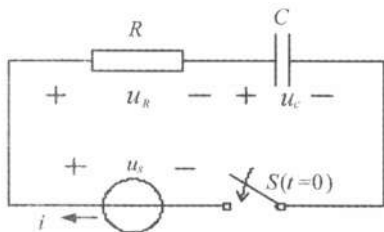


图1 正弦交流电源激励下的RC电路

如图1所示,设电源为正弦交流电源,电源电动

势满足: $u_s = U_{sm} \sin(\omega t + \varphi_s)$, φ_s 为电路接通时刻外施激励电压的初相角,它的量值决定于电路接通的时刻。在 $t=0$ 时把开关S合上,根据KVL及数学推论可求得电容器两极板间的电压为:

$$u_c = U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_c) + (U_0 - U_{cm} \sin \varphi_c) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2)$$

其中 U_{cm} 为电容器两极板间电压的最大值, U_0 为 $t=0$ 时电容器极板间的初始电压, φ_c 为电容器极板电压的初位相, $\tau = RC$ 为时间常数。由 $i = C \frac{du_c}{dt}$ 及(2)式可得回路中的电流为:

$$i = \omega C U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_c) - \frac{1}{R} (U_0 - U_{cm} \sin \varphi_c) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

以平行板电容器为例,设电容器的极板面积为 S ,两极板间的距离为 d ,且 $d < \sqrt{S}$,极板间的场强为: $E = \frac{q}{\epsilon_0 S}$,可得电容器极板间的位移电流为:

$$i_D = \frac{dq_D}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q}{\epsilon_0 S} \right) = \frac{dq}{dt} = i \quad (4)$$

由(4)式可见,电容器两极板间的位移电流在量值上正好等于回路中的传导电流,二者具有相同的位相和周期。这表明,电容器表面中断了的传导电流被极板间的位移电流接替下去,从而保证了电流的连续性,这正是麦克斯韦全电流定律的体现。另外,由(3)、(4)两式可知,传导电流和位移电流均由两部分组成,第一项表示两种电流与电源按同频率的余弦规律变化,当 $t \rightarrow \infty$ (工程技术上取 $3\tau \sim 5\tau$)^[19],第二项衰减为零,此时传导电流和位移电流就由第一项决定,故把第一项称为电流的稳态分量;第二项称为暂态分量,它是一个时间的指数函数,随着时间的增长而逐渐趋于零,且衰减的快慢取决于时间常数 τ 。特别地,当 $U_0 = U_{cm} \sin \varphi_c$ 时,电路不经过暂态过程而直接进入稳态,此时传导电流和位移电流都不会出现暂态分量。

2 正弦交流电源激励下一阶RC电路导线中的位移电流

下面对导线中的位移电流进行分析和讨论。

设导线的横截面积为 S' ,根据欧姆定律 $\vec{j} = \sigma \vec{E}'$ 可得

$$E' = \frac{j}{\sigma} = \rho \frac{i}{S'} \quad (5)$$

式中, σ 和 ρ 分别为电导率和电阻率。故导线中的位移电流为:

$$i'_D = \frac{d\phi'_D}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_s \varepsilon \vec{E}' \cdot d\vec{s} \quad (6)$$

将(3)式和(5)式带入(6)式,最后可得导线中的位移电流为:

$$i'_D = \varepsilon \rho \left[\omega^2 C U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_c + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{R^2 C} (U_0 - U_{Cm} \sin \varphi_c) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (7)$$

由(7)式可知,导线中的位移电流也由两部分组成,即暂态分量和稳态分量。同样的,当 $U_0 = U_{Cm} \sin \varphi_c$ 时,电路不经过暂态过程而直接进入稳态,此时导线中的位移电流也不会出现暂态分量而直接进入稳态。

当 $t=0$ 时,若 $\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$,导线中的位移电流达到最大值:

$$i'_{Dmax} = \varepsilon \rho \left[\omega^2 C U_{Cm} + \frac{1}{R^2 C} (U_0 + U_{Cm}) \right] \quad (8)$$

2.1 过电压时导线中的位移电流

令 $\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$,当 $\omega t = \pi$ (即 $t = \frac{T}{2}$)时,由(2)式得电容器两端的电压为: $u_c(\frac{T}{2}) = U_{Cm} + [U_0 + U_{Cm}] e^{-\frac{T}{2\tau}}$,若时间常数 $\tau \gg T$,则 $e^{-\frac{T}{2\tau}} \approx 1$, $u_c(\frac{T}{2}) = 2U_{Cm} + U_0$,此时电容元件两端的电压值比稳态电压幅值 U_{Cm} 的2倍还大,这种现象称为过电压现象。在过电压出现时导线中的位移电流为:

$$i'_D = \varepsilon \rho \left[\frac{1}{R^2 C} (U_0 + U_{Cm}) - \omega^2 C U_{Cm} \right] \quad (9)$$

从(9)式可以发现,电容器两极板间出现过电压时,导线中的位移电流并不是最大值,导线中位移电流的最大值与过电压出现时导线中的位移电流之差为 $2\varepsilon\rho\omega^2CU_{Cm}$,这表明电容器两极板间的电压与导线中的位移电流是不同相的。

2.2 过电流时导线中的位移电流

令 $\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$,当 $\omega t - \frac{\pi}{2} = \pi$ ($t = \frac{3}{4}T$)时,根据(3)式可得回路中的电流为: $i(\frac{3}{4}T) = -\omega C U_{Cm} - \frac{1}{R} [U_0 + U_{Cm}] e^{-\frac{3T}{4\tau}}$,若时间常数 $\tau \gg T$,则 $e^{-\frac{3T}{4\tau}} \approx 1$, $i(\frac{3}{4}T) = \left| \omega C + \frac{1}{R} \right| U_{Cm} + \frac{1}{R} U_0$,此时电流的绝对值达到了最大,并且大于回路稳态电流的幅值 $\omega C U_{Cm}$,出现了“过电流”现象,此时导线中的位移电流为:

$$i'_D = \varepsilon \rho \left[\frac{1}{R^2 C} (U_0 + U_{Cm}) - \omega^2 C U_{Cm} \right] \quad (10)$$

可见,回路中出现过电流时,导线中的位移电流也不是最大值,而是相差 $\varepsilon\rho\omega^2CU_{Cm}$,这充分说明RC电路中的传导电流与位移电流也是不同相的。

2.3 RC电路达到稳态时导线中的位移电流

由(3)式可知,正弦交流电激励下的RC电路在 $t \rightarrow \infty$ (工程技术上取 $3\tau \sim 5\tau$)^[20]时,电路进入稳态,此时电路中的传导电流为:

$$i = I_0 \cos(\omega t + \varphi_c) \quad (11)$$

其中 $I_0 = \omega C U_{Cm}$ 。根据(4)、(7)式可得电容器极板间的位移电流和导线中的位移电流分别为:

$$\text{极板间: } i_D = I_0 \cos(\omega t + \varphi_c) = i \quad (12)$$

$$\text{导线中: } i'_D = \varepsilon \rho I_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_c + \frac{\pi}{2}) \quad (13)$$

比较(11)、(12)、(13)式可知,RC电路经历暂态过程进入稳态时,导线中的位移电流 i'_D 与外加激励按相同的周期变化,位移电流 i'_D 在相位上超前于传导电流 $\frac{\pi}{2}$,它不消耗功率,也不产生焦耳热。导线中的位移电流与传导电流的幅值之比(同时也等于它与电容器极板间的位移电流幅值之比)为:

$$\frac{I'_{D0}}{I_0} = \frac{\varepsilon \rho I_0 \omega}{I_0} = \varepsilon \rho \omega \quad (13)$$

此式表明,位移电流与传导电流的幅值之比与所加电流的频率密切相关,只要 $\varepsilon\rho\omega \ll 1$ 时, $I'_{D0} \ll I_0$ 。在MKSA制中,对一般的良导体有: $\rho \sim 10^{-8} \Omega \cdot m$, $\varepsilon_0 \sim 10^{-11} C^2/(N \cdot m^2)$,设 $\varepsilon_r < 10$,则

$$\frac{I'_{D0}}{I_0} \sim 10^{-18} \omega \quad (14)$$

由此可见,当 $\omega \ll 10^{18} \text{HZ}$ (X射线的频率)的条件下, $\frac{I'_{D0}}{I_0} \ll 1$,此时导线中的位移电流相对于传导电流可以忽略。在实际电路中,即使有超高频的电流,如电流达到 10^8HZ ,这个比值仍是一个低达 10^{-10} 的数,从而说明在导线中虽然存在位移电流,但是却微不足道,传导电流占绝对优势。实际上,在电工学和无线电电子学所用频率范围内,导体中因为电流(或电场)的变化引起的位移电流常被忽略。只有当出现超高频率的电流时(其频率接近 10^{18}HZ)时,导体中的位移电流的值可跟传导电流相比拟,此时不能忽略位移电流。

3 结论

由以上分析可见,在RC电路中,导线中自由电子的定向运动形成的电流终止在极板上后,极板间的电流由位移电流接替,其量值等于流入接线的充电电流,它确实起到完成电路、保持电路连续性的作用,其本质是变化的电场,所起的作用是不能忽

略的。但导线中的位移电流的数值却依赖于外加电流的频率,只有在 $\omega \ll 10^{18}\text{HZ}$ 的情况下,位移

电流才可以被忽略,而在 ω 接近 10^{18}HZ 时,位移电流可与传导电流相比拟,此时位移电流不能忽略。

注释及参考文献:

[1]马信山,张济世等.电磁场基础[M].北京:清华大学出版社,1995:319-332.

[2]郭奕玲,沈慧君.物理学史[M].北京:清华大学出版社,1993:143-146.

[3]郭硕鸿.电动力学[M].北京:高等教育出版社,1995:31.

[4]朱洪玉,谢实崇.关于真空中的位移电流、Maxwell方程组、电磁场的源及Jefimenko公式的几点注记[J].大学物理,2003,22(5):4-8.

[5]冯杰.位移电流的热效应探讨[J].华南师范大学学报(自然科学版),1999(2):55-60.

[6]韩金学.位移电流和传导电流[J].辽宁大学学报(自然科学版),2001,28(3):260-262.

[7]李淑芬.浅析位移电流与传导电流的区别[J].赤峰学院学报(自然科学版),2005,21(5):14-15.

[8]格日乐图,白音布图.位移电流的性质[J].内蒙古民族大学学报(自然科学版),2003(8):373-376.

[9]尹绍全.关于位移电流容易混淆的几个问题[J].四川师范大学学报(自然科学版),1998,21(4):482-485.

[10]赵凯华.位移电流不激发磁场简例[J].大学物理,2001,20(6):40.

[11]赵凯华.再论位移电流与传导电流不以同样规律激发磁场[J].大学物理,2001,20(8):29-31.

[12]高炳坤.对《位移电流不激发磁场简例》一文的补充[J].大学物理,2002,21(9):30-31.

[13]朱久运.关于位移电流激发的磁场[J].大学物理,1983,2(11):9-12.

[14]李元勋.真空中的“位移电流”与传导电流以同样规律激发磁场吗? [J].大学物理,1995,14(4):14-17.

[15]田晓岑.“真空中的位移电流与真实电流同等地激发磁场”的传统提法并没有错[J].大学物理,2001,20(8):24-28.

[16]吴明阳,苏磊.位移电流和传导电流在激发磁场方面的异同[J].郑州轻工业学院学报,2005,20(4):92-93.

[17]苏景顺,谢革英.似稳条件下位移电流不激发磁场的证明及其例证[J].河北建筑工程学院学报,2007,25(4):95-96.

[18]赵凯华,陈熙谋.电磁学[M].北京:高等教育出版社,2003.4.

[19]邱关源.电路[M].北京:高等教育出版社,2006.

Alternating Current Excitation First-order RC-circuit of the Displacement Current

ZHOU Ji-fang

(Teaching and Research Section of Physics, Chengdu Medical College, Chengdu, Sichuan 610081)

Abstract: The author analyzes the displacement current when alternating voltage source drives first-order RC-Circuit according to the Theory of Maxwell. Taking parallel plate capacitor as a sample, the article puts forward the theoretical analysis of displacement current between the two poles of capacitor plates, derives the electric expression of displacement current in line conductor and then discusses the excess voltage and excess current in the current and the displacement current in line conductor under stable condition.

Key words: RC-Circuit; Displacement current; Excess voltage; Excess current