# q-Carleson测度紧性的一个等价刻画

詹 亮[1],刘 浏[2]
(1.西华大学 数学与计算机学院,四川 成都 610039;2.四川外语学院 成都学院,四川 成都 611731)

【摘 要】对q阶紧Carleson测度进行了讨论,并给出了它的一个刻画。

【关键词】紧Carleson测度;复合算子
【中图分类号】O174.56 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2010)03-0020-02

## 1 引言

1958年Carleson在解决有界解析函数插值问题时,提出了Carleson测度这个重要概念。此后人们发现在研究复合算子的有界性与紧性时,也常用到这样一个重要的工具。现在利用Carleson测度研究复合算子性质,已经被广大研究者广泛地讨论。

在利用Carleson测度研究复合算子性质时,常常需要讨论Carleson测度的各种性质,这些性质都在复合算子研究中起到重要的作用[1~4]。

本文对q阶紧Carleson测度进行了讨论,并给出了相应等价的刻画。

为此我们首先给出如下紧q阶Carleson测度的定义[5]。

## 2 相关定义

定义:D是复平面上的单位圆盘,μ是D上的正有限Borel测度。如果对任意$z=e^{j\theta}\in\partial D,h>0,q>0$,Carleson块:

$$S_h(z)=\{\omega=re^{it}\in D;1-h\le r<1,|t-\theta|\le h\}$$

满足$\lim\limits_{h\to 0}\sup\limits_{z\in\partial D}\dfrac{\mu(S_h(z))}{h^q}=0$,则称μ是D上的紧q阶Carleson测度。

为了叙述的简洁,笔者做出如下的约定:若存在正常数$C_1$和$C_2$,使得$C_1A\leqslant B\leqslant C_2A$,则规定$A\approx B$。

## 3 主要结果

定理 设q>0,μ是D上的正有限Borel测度,则μ是一个q阶的紧Carleson测度的充要条件为

$$\lim_{|a|\to 1,a\in D}\int_D\left(\frac{1-|a|^2}{|1-z\bar{a}|^2}\right)^q d\mu=0$$

证明:充分性 设

$$S_h(e^{i\theta})=\{\omega=re^{it}\in D,1-h\le r<1,|t-\theta|\le h\}$$

进一步,可以假设$h\le\frac{1}{4}$。令$a=(1-\frac{h}{2})e^{i\theta}$,则当$z\in S_h(e^{i\theta})$时

$$1-|a|^2\approx|1-\bar{a}z|\approx h$$

事实上,显然有$1-|a|^2=h(1-\frac{h}{4})$,所以$1-|a|^2\approx h$。

由三角不等式和上面对a的定义,可以得到:

$$|1-\bar{a}z|\ge 1-|a||z|\ge 1-(1-\frac{h}{2})=\frac{h}{2}$$

$$|1-\bar{a}z|\le|1-\bar{a}z+\bar{a}a-\bar{a}a|\le|1-\bar{a}a|+|-\bar{a}z+\bar{a}a|$$

$$|1-\bar{a}a|\approx h$$

通过对$S_h(e^{i\theta})$图形的分析,又容易得到:

$$S_h(e^{i\theta})\subseteq\{z;|z-a|<3h\}$$

从而$|1-\bar{a}z|\approx h$。再由$1-|a|^2\approx|1-\bar{a}z|\approx h$,则有

$$\left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}\right)^q\approx\frac{1}{h^q}$$

$$\mu(S_h(e^{i\theta}))\le\int_{S_h(e^{i\theta})}d\mu\le\int_{S_h(e^{i\theta})}\frac{h^q}{h^q}d\mu\le Ch^q\int_{S_h(e^{i\theta})}\left(\frac{1-|a|^2}{|1-za|^2}\right)^q d\mu$$

$$\frac{\mu(S_h(e^{i\theta}))}{h^q}\le C\int_{S_h(e^{i\theta})}\left(\frac{1-|a|^2}{|1-z\bar{a}|^2}\right)^q d\mu$$

因为

$$\lim_{|a|\to 1,a\in D}\int_D\left(\frac{1-|a|^2}{|1-z\bar{a}|^2}\right)^q d\mu=0$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\sup_{z\in\partial D}\frac{\mu(S_h(z))}{h^q}=0$$

即μ是q阶的紧Carleson测度。

必要性 因为μ为q阶紧Carleson测度,所以任意ε>0,存在$\delta_0$>0,当0<h<8$\delta_0$时,对一切$z\in\partial D$有

$$\frac{\mu(S_h(z))}{h^q}<\varepsilon M$$

令

$$M=\frac{1}{2^{2(1+q)}}$$

设$a=re^{i\theta}\in D$,δ=1−r。不妨设$\delta<\delta_0$且$\delta<\frac{1}{4}$,所以$r=|a|\ge\frac{3}{4}$

记$\Omega=\{z\in D;|1-\bar{a}z|<\delta_0\}$,则必存在自然数N,满足$2^{N-1}\delta\leqslant 4\delta_0<2^N\delta$

令$E_k=\{z\in D;|z-e^{i\theta}|<2^k\delta\},k=1,2,\ldots,N$

由三角不等式和$|z-a|<|1-z\bar{a}|$,所以对任意$z\in\Omega$

$$|1-ze^{-i\theta_0}|^{\frac{1}{2}}\le|1-ae^{-i\theta_0}|^{\frac{1}{2}}+|1-\bar{a}z|^{\frac{1}{2}}<2\delta_0^{\frac{1}{2}}$$

收稿日期:2010-06-15
作者简介:詹 亮(1980- ),男,四川新都人,讲师,硕士,主要从事算子理论的研究。

所以$\Omega\subset E_0=\{z\in D;|1-ze^{-i\theta_0}|<4\delta_0\}\subset E_N$

显然，当$z\in E_1$时

$$\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^{1+q}}<\frac{2}{\delta^q} \tag{1}$$

且$z\in E_k\backslash E_{k-1}$(k=2,3,…,N)时，$|1-\overline{a}z|\geq\frac{3}{4}2^{k-1}\delta$。

事实上，由于$|1-e^{-i\theta_0}z|\geq 2^{k-1}\delta$，所以

$|a||1-e^{-i\theta_0}z|\geq 2^{k-1}\delta|a|\geq\frac{3}{4}2^{k-1}\delta$

再注意到$|re^{-i\theta_0}z|<r$及复数的几何意义，就可以得到前述之不等式：

$$|1-\overline{a}z|=|1-re^{-i\theta_0}z|\geq|r-re^{-i\theta_0}z|\geq\frac{3}{4}2^{k-1}\delta$$

又因为

$E_k\subset S_{2^k\delta}(e^{i\theta_0})=\{z=re^{it}\in D;1-2^k\delta\leq r<1,|t-\theta_0|\leq 2^k\delta\}$

而$2^k\delta<8\delta_0$(k=1,2,…,N)，所以$\mu(E_k)<\varepsilon M(2^k\delta)^q$。于是

$$\int_{\Omega}\left(\frac{1-|a|^2}{|1-za|^2}\right)^q d\mu\leq\int_{E_1}\left(\frac{1-|a|^2}{|1-za|^2}\right)^q d\mu+\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\backslash E_{k-1}}\left(\frac{1-|a|^2}{|1-za|^2}\right)^q d\mu$$

再注意到(1)，可有如下的估计：

$$\int_{E_1}\left(\frac{1-|a|^2}{|1-z\overline{a}|^2}\right)^q d\mu+\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\backslash E_{k-1}}\left(\frac{1-|a|^2}{|1-z\overline{a}|^2}\right)^q d\mu<C\varepsilon M$$

$$+C\varepsilon M\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{qk}}\quad\text{(C为常数)}$$

又

$$\int_{D\backslash\Omega}\left(\frac{1-|a|^2}{|1-z\overline{a}|^2}\right)^q d\mu\leq\int_{D\backslash\Omega}\left(\frac{1-|a|^2}{\delta_0^2}\right)^q d\mu\leq\left(\frac{1-|a|^2}{\delta_0^2}\right)^q\mu(D)$$

由ε的任意性，综上可知

$$\lim_{|a|\to 1,a\in D}\int_D\left(\frac{1-|a|^2}{|1-z\overline{a}|^2}\right)^q d\mu=0$$ 证毕。

以上，笔者给出了紧q阶Carleson测度的刻画。通过此性质来刻画复合算子性质，这也是笔者正在讨论的问题。

## 注释及参考文献：


[1]叶善力.Carleson测度与Bloch型函数空间[J].福建师范大学学报，1999，15：11-15.

[2]Liu yongmin.Composition operators Mapping into the E(p，q)spaces[J].Chin Quart J of China，2003，18(1)：29-34.

[3]Wang maofa，Liu peide.Weighted Composition Operators Between Hardy spaces[J].Applied Mathematics，2003，16(1)：130-135.

[4]Jun Soo Choa.Composition operators between Nevalinna-Type Spaces[J].Journal of Mathmatical Analysis and Applications，2001，257：378-402.

[5]徐宪民.复合算子理论[M].北京：科学出版社，1999.


# A Characteristic of the Compact Carleson Measure of Order q


ZHAN Liang[1]，LIU Liu[2]

*(1.College of Mathematics and Computer Engineering，Xihua University，Chengdu，Sichuan 610039；*
*2.Chengdu Institute of Sichuan International Studies University，Chengdu，Sichuan 611731)*



Abstract: In the artical，we discuss the compact carleson measure of order q，and we give a characteristic about it.



Key words: Compact carleson measure；Composition operator