一元绝对值函数可导性的讨论*

闫德宝
(菏泽学院 数学系,山东 菏泽 274015)

【摘 要】文章讨论了一元绝对值函数的可导性。文中首先推广了一个一般性的结论:函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导,指出当 $\alpha>0$ 时 $f(x)=x^{\alpha}|x|$ 在 $x=0$ 处可导,并进一步推广了该结论。接着讨论了当 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导时,$|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处的可导性。最后给出了两个具体的例子。

【关键词】一元函数;绝对值;可导性
【中图分类号】O174 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2010)03-0018-02

1 连续不可导性质的推广

在学习函数可导性与连续性的关系时,通常会用函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导来说明问题。其实这一性质可以做进一步的推广。

定理1.1 函数 $f(x)=|x-x_0|$ 在 $x=x_0$ 处连续但不可导。

定理1.2 当 $\alpha>0$ 时 $f(x)=x^{\alpha}|x|$ 在 $x=0$ 处可导.

证明 由于

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{\alpha}|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^{\alpha+1}}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha}|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+1}}{x}=0$$

故 $f'_-(0)=f'_+(0)=0$,即 $f(x)=x^{\alpha}|x|$ 在 $x=0$ 处可导.证毕.

推论1.1 当 $\alpha>0$ 时 $f(x)=(x-x_0)^{\alpha}|x-x_0|$ 在 $x-x_0$ 处可导.

2 一般绝对值函数|f(x)|可导性的讨论

定理2.1 若函数 $f(x)$ 在 $x-x_0$ 处可导,且 $f(x_0)\neq0$,则 $|f(x)|$ 在 $x-x_0$ 处也可导.

证明 由于 $f(x)$ 在 $x-x_0$ 处可导,故存在 $\delta_1>0$,使得 $f(x)$ 在邻域 $U(x_0,\delta_1)$ 内连续。又 $f(x_0)\neq0$,由连续性知,存在 $\delta_2>0$,使得 $f(x)$ 在邻域 $U(x_0,\delta_2)$ 内恒大于零或恒小于零。令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则 $f(x)$ 在领域 $U(x_0,\delta)$ 内连续且保持符号不变,不妨令 $f(x)>0$。则

$|f(x)|=f(x),x\in U(x_0,\delta)$

从而有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

即 $(|f(x)|)'_{x=x_0}=f'(x_0)$

同理,若 $f(x)<0,x\in U(x_0,\delta)$ 则有

$(|f(x)|)'_{x=x_0}=-f'(x_0)$.证毕.

定理2.2 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,且 $f(x_0)=0$,

(1)若 $f'(x_0)=0$,则 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处可导;

(2)若 $f'(x_0)\neq0$,则 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处不可导.

证明由于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,且 $f(x_0)=0$,故存在 $\delta>0$,使得 $f(x)$ 在邻域 $U(x_0,\delta)$ 内,一方面 $f(x)$ 连续,另一方面,$f(x)$ 在 x_0 的左、右两侧异号.不妨令

$f(x)\geqslant0,x\in(x_0-\delta,x_0)$,

$f(x)\leqslant0,x\in(x_0,x_0+\delta)$.

(1)若 $f'(x_0)=0$,则有

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{-f(x)+f(x_0)}{x-x_0}=-f'(x_0)=0$$

即 $|f(x_0)|'_-=|f(x_0)|'_+=0$,所以 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处可导.

(2)若 $f'(x_0)\neq0$,则由(1)知,

$|f(x_0)|'_-=f'(x_0),|f(x_0)|'_+=-f'(x_0)$

此时,$|f(x_0)|'_-\neq|f(x_0)|'_+$,所以 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处不可导.

3 应用举例

在一些教科书和考试中,绝对值函数的可导性的讨论和判断是经常出现的,但教材对这类问题鲜有涉及,这使得人们在遇到这类问题时很难处理。而应用上面的结论处理这类问题就显得有章可寻,有理可依,具体应用起来也很简单。下面就以具体例子来说明。

例1 设函数 $f(x)=(x^3-2x^2-3x)|x^2-1|$,求 $f(x)$ 不可导的点.

解 $f(x)=x(x-3)(x+1)|x-1||x+1|$,由推论1.1知,$f(x)$ 不可导的点为 $x=1$,但函数在该点是连续的.

例2 设 $f(x)=\left|\cos^2x-\frac{1}{2}\right|$,试判断 $f(x)$ 在R上的可导性.

解 令 $g(x)=\cos^2x-\frac{1}{2}$,

收稿日期:2010-07-11
*基金项目:菏泽学院2007年度科学研究资助项目(项目编号:XY07SX01)。
作者简介:闫德宝(1980-),男,山东曹县人,理学硕士,讲师。研究方向:偏微分方程及其应用。

则当 $x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，g(x)≠0.由定理2.1知，当 $x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，

$f(x) = |g(x)| = \left|\cos^2 x - \frac{1}{2}\right|$ 可导.

又当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，g(x)=0.而

$$g'(x)\Big|_{x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}} = -2\cos x\sin x\Big|_{x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}} = \pm1$$

由定理2.2知，当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，

$f(x) = |g(x)| = \left|\cos^2 x - \frac{1}{2}\right|$ 不可导.

综上知，函数 $f(x) = \left|\cos^2 x - \frac{1}{2}\right|$

当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时不可导,在其它实数点上均可导.

注释及参考文献：

[1]同济大学数学系.高等数学(上)(第三版)[M].北京：高等教育出版社，2008.

[2]吴赣昌.微积分(上)(第三版)[M].北京：中国人民大学出版社，2009.

[3]张锦炎，周建莹.高等数学(上)(修订版)[M].北京：北京大学出版社，2005.

[4]张玉林.关于绝对值函数求导问题的讨论[J].内蒙古民族师院学报(自然科学版)，1995，10(1)：91-92.

[5]赵洪牛.含绝对值函数的可导性讨论[J].高等数学研究，2004，7(5)：40-41.

[6]马保国，王延军.分段函数，函数的可积性与原函数存在性[J].大学数学，2009，25(2)：200-203.

Discussion on Derivative of AbsoluteValue Function of One Variable

YAN De-bao

(Department of Mathematics，Heze Unversity，Heze，Shandong 274015)

Abstract: It discusses the derivative of absolute value functions with one variable. Firstly，a general conclusion is promoted，that is，the function f(x)=|x| does not exist derivation at x=0，but if α >0，$f(x)=x^{\alpha}|x|$ exists derivation at x=0，and we get an another conclusion. Then it discusses the derivative of function |f(x)| at $x=x_0$ if f(x) gets derivation there. In the end of this paper，two examples are showed.

Key words: Function with one variable；Absolute value；Derivative