关于常系数递推数列组的解法探究*

陈朝斌[1],杨 芹[1],唐 梅[2],吴立宝[1**]
(1.内江师范学院 数学与信息科学学院,四川 内江 641112;
2.内江师范学院 经济与管理学院,四川 内江 641112)

【摘 要】运用组合数学中的母函数和线性代数中的行列式等知识,对常系数递推数列组的解进行了一定程度的讨论及应用。

【关键词】递推数列组;母函数;克莱默法则
【中图分类号】O151.21 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2009)02-0022-03

1 引言

组合数学主要以计数研究为主,递推数列是其中的一个重要课题,在计算科学特别是算法分析中有着广泛的应用。对于递推数列方程组问题,文[1]参考中学二元、三元方程组的解法,利用消元的思想进行求解,文[2]结合母函数,对一道特殊递推方程组进行研究,对于n元的问题用此法求解相当的复杂,具有一定的局限性。文[3]依靠矩阵(线性方程组),对常系数齐线性递归方程组给出了一般解的结构。经过研究,结合母函数和行列式等知识给出一种较为简便的求法,并将其推广到n元递推数列组,希望能给读者一些参考。

定义1 对数列$\{A_n\}$中的各项$A_0,A_1,A_2,\cdots$,构造函数$G(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_nx^n$,称G(x)为数列$\{A_n\}$的母函数,并规定G(x)可以能够像多项式那样进行四则运算,并不考虑敛散性。

定义2 设有m个数列$\{A_n^{(1)}\},\{A_n^{(2)}\},\{A_n^{(3)}\},\cdots,\{A_n^{(m)}\}$,其相互间满足如下的关系式:

$$A_{n+k}^{(i)}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}A_{n+l}^{(j)}+b^{(i)}\quad(i=1,2,\cdots,m,\text{且}k,l\in N)\cdots(\aleph)$$

其中$b^{(i)}$是常数或关于n的指数函数,则称(ℵ)为递推数列组。初值条件为$A_l^{(k)}=d^{(k)}(k=1,2,\cdots,m)$,其中$d^{(k)}$为已知常数。

2 递推数列组及解法

2.1 $A_{n+k}^{(i)}=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}A_{n+l}^{(j)}+b^{(i)}(i=1,2,\cdots,m)$型。

2.1.1 用x^n乘以数列组(ℵ)的每个方程的两边,并对于n从0到∞求和,得到如下方程:

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_{n+k}^{(i)}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}A_{n+l}^{(j)}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}b^{(i)}x^n$$

2.1.2 令$G^{(i)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n^{(i)}x^n$,则

$$\frac{1}{x^k}\left[G^{(i)}(x)-\sum_{n=0}^{k-1}A_n^{(i)}x^n\right]=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\frac{1}{x^l}\left[G^{(j)}(x)-\sum_{n=0}^{l-1}A_n^{(j)}x^n\right]+\sum_{n=0}^{\infty}b^{(i)}x^n$$

整理得

$$\frac{1}{x^k}G^{(i)}(x)-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\frac{1}{x^l}G^{(j)}(x)=\frac{1}{x^k}\sum_{n=0}^{k-1}A_n^{(i)}x^n-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\frac{1}{x^l}\sum_{n=0}^{l-1}A_n^{(j)}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}b^{(i)}x^n\cdots(*);$$

2.2 $A_n^{(i)}=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}A_n^{(j)}+b^{(i)}(i=1,2,\cdots,m)$型。

2.2.1 用x^n乘以数列组(ℵ)的每个方程的两边,并对于n从0到∞求和,得到如下方程:

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(i)}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}A_n^{(j)}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}b^{(i)}x^n$$

2.2.2 令$G^{(i)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n^{(i)}x^n$,则$G^{(i)}(x)-\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}G^{(j)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b^{(i)}x^n\cdots(**)$;

在数列组(*)、(**)中,把$G^{(i)}(x)$与$G^{(j)}(x)$看做自变量,其它的量都视为已知量,记D为数列组(*)、(**)

收稿日期:2009-04-07
*基金项目:内江师范学院2008年度大学生科研项目(项目编号:08NSD-164)。

作者简介:陈朝斌(1987-),男,四川中江人,内江师范学院数学与信息科学学院数学与应用数学本科学生。**为通讯作者。

的系数行列式,$D^{(i)}$是把D中第i列元素换以数列组(*)、(**)的常数项,而得到m阶行列式。由克莱默法则知:当$D\neq0$时,数列组(*)、(**)都有唯一解,记作$G^{(i)}(x)=\frac{D^{(i)}}{D}=\frac{P^{(i)}(x)}{Q^{(i)}(x)}$($p_{(j)}^{(i)}$、$q_{(j)}^{(i)}\in N$),$p^{(i)}(x)$不能进行因式分解,其中$Q^{(i)}(x)=\prod_j\left(1-p_{(j)}^{(i)}x\right)^{q_{(j)}^{(i)}}$。然后将$G^{(i)}(x)$表示为$G^{(i)}(x)=\sum_j\frac{\lambda_{(j)}^{(i)}}{\left(1-p_{(j)}^{(i)}x\right)^{q_{(j)}^{(i)}}}$形式,其中$\lambda^{(i)}_{(j)}$是待定常数。再根据$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$及$\frac{1}{1-px}=\sum_{n=0}^{\infty}p^nx^n$和$\frac{1}{(1-px)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{m+n-1}^{n}p^nx^n$,将$G^{(i)}(x)$展开成$G^{(i)}(x)=\sum_j\lambda_{(j)}^{(i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_{(j)}^{(i)}\right)^nx^n$的形式,根据母函数的定义知$A_n^{(i)}=\sum_j\lambda_{(j)}^{(i)}\left(p_{(j)}^{(i)}\right)^n$。最后根据初值条件$A_1^{(k)}=d^{(k)}$,(k=1,2,⋯,m),求出$\lambda^{(i)}_{(j)}$,(i=1,2,⋯,m)即可。

3 应用举例

例1　设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_0=1$,$b_0=0$,且$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3\\b_{n+1}=8a_n+7b_n-4\end{cases}$(n=1,2,3⋯),

求证:a_n是完全平方数。(2000年全国高中联赛加试题)

解:由题知$a_0=1$,$b_0=0$,则$a_1=7$,$a_2=49$。用x^n乘以(1)式的每一个方程的两边,并对于n从0到∞求和,得到如下方程:

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n=7\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+6\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n-3\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}x^n=8\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+7\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n\end{cases}$$

令$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$,则$\begin{cases}\frac{1}{x}\left[A(x)-a_0\right]=7A(x)+6B(x)-\frac{3}{1-x}\\\frac{1}{x}\left[B(x)-b_0\right]=8A(x)+7B(x)-\frac{4}{1-x}\end{cases}$

整理得

$$\begin{cases}A(x)(1-7x)-6xB(x)=\frac{1-4x}{1-x}\\8xA(x)-(1-7x)B(x)=\frac{4x}{1-x}\end{cases}\cdots(***)$$

由克莱默法则有:(***)式的系数行列式为$D=\begin{vmatrix}1-7x&-6x\\8x&-(1-7x)\end{vmatrix}=-x^2+14x-1$,所以

$$A(x)=\frac{1}{-x^2+14x-1}\begin{vmatrix}\frac{1-4x}{1-x}&-6x\\\frac{4x}{1-x}&-(1-7x)\end{vmatrix}=\frac{4x^2-11x+1}{(1-x)\left[1-\left(7+4\sqrt{3}\right)x\right]\left[1-\left(7-4\sqrt{3}\right)x\right]}.$$

设$A(x)=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-\left(7+4\sqrt{3}\right)x}+\frac{C}{1-\left(7-4\sqrt{3}\right)x}$,则

$$a_n=A+B\cdot\left(7+4\sqrt{3}\right)^n+C\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)^n$$

所以$\begin{cases}A+B+C=1\\A+\left(7+4\sqrt{3}\right)B+\left(7-4\sqrt{3}\right)C=7\\A+\left(7+4\sqrt{3}\right)^2B+\left(7-4\sqrt{3}\right)^2C=49\end{cases}$,解得$\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{4}\\C=\frac{1}{4}\end{cases}$

因此$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)^n+\frac{1}{4}\cdot\left(7+4\sqrt{3}\right)^n=\frac{1}{4}\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^n+\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]^2$

因为$\left(2-\sqrt{3}\right)^n+\left(2+\sqrt{3}\right)^n$为正偶数,所以$a_n$是完全平方数.

例2　求下列递推数列组$\begin{cases}a_{n+1}=a_n+b_n+c_n\\b_{n+1}=4^n-c_n\\c_{n+1}=4^n-b_n\end{cases}$, $n\geq1$,且满足$a_1=b_1=c_1=1$

解:由题知$a_1=1$,$b_1=1$,$c_1=1$,则$a_0=1$,$a_2=3$,$b_0=0$,$c_0=0$用x^n乘以(1)式的每一个方程的两边,并对于n从0到∞求和,得到如下方程:

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\\\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}4^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\\\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}4^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\end{cases}$$

令$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$,$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$,则

$$\begin{cases}\frac{1}{x}\left[A(x)-a_0\right]=A(x)+B(x)+C(x)\\ \frac{1}{x}\left[B(x)-b_0\right]=\frac{1}{1-4x}-C(x)\\ \frac{1}{x}\left[C(x)-c_0\right]=\frac{1}{1-4x}-B(x)\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}A(x)(1-x)-xB(x)-xC(x)=1\\ B(x)+xC(x)=\frac{x}{1-4x} & \cdots(****)\\ xB(x)+C(x)=\frac{x}{1-4x}\end{cases}$$

由克莱默法则有:(****)式的系数行列式为$D=\begin{vmatrix}1-x & -x & -x\\ 0 & 1 & x\\ 0 & x & 1\end{vmatrix}=(1-x)^2(1+x)$,所以

$$A(x)=\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}\begin{vmatrix}1 & -x & -x\\ \frac{x}{1-4x} & 1 & x\\ \frac{x}{1-4x} & x & 1\end{vmatrix}=\frac{1-3x-2x^2}{(1-x)(1+x)(1-4x)}$$

设$A(x)=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{1-4x}$,则$a_n=A+B\cdot(-1)^n+C\cdot 4^n$,所以

$\begin{cases}A+B+C=1\\ A-B+4C=1\\ A+B+16C=3\end{cases}$,解得$\begin{cases}A=\frac{2}{3}\\ B=\frac{1}{5}\\ C=\frac{2}{15}\end{cases}$,因此$a_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot(-1)^n+\frac{2}{15}\cdot 4^n$

同理$b_n=c_n=-\frac{1}{5}\cdot(-1)^n+\frac{1}{5}\cdot 4^n$

4 评注

在递推数列组$A_{n+k}^{(i)}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}A_{n+l}^{(j)}+b^{(i)}$,(i=1,2,…,m,且k,l∈N)…(ℵ)中,方程的个数小于未知量(即数列项)的个数,根据文[5]知:这个线性方程组要么无解,要么有无穷多个解。如果我们通过母函数$G^{(i)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(i)}x^n$,就可以将数列组(ℵ)转化为方程个数等于未知量(即$G^{(i)}(x)$)个数的数列组(*)或(**)式,然后根据克莱默法则知:当D≠0时,数列组(*)、(**)都有唯一解。

注释及参考文献:

[1]孙世新,张先迪.组合原理及其应用[M].北京:国防工业出版社,2006:178-187.

[2](美)Roberts,F.S等著,冯速译.应用组合数学(原书第2版)[M].北京:机械工业出版社,2007:253-255.

[3]欧筑峰.关于常系数齐线性递归方程组的解的结构[J].贵州科技工程职业学院学报,2008(9):46-52.

[4]卢开澄,卢华明.组合数学[M].北京:清华大学出版社,2006:42-61.

[5]张禾瑞.高等代数[M].北京:高等教育出版社,1997:136-140.

[6]陈传理,张同君.竞赛数学教程[M].北京:高等教育出版社,2005:104-111.

[7]刘亚.递归数列的通项浅谈[J].武陵学刊(自然科学),1999(5):82-84.

[8]陈朝斌.运用母函数求解递推数列通项公式[J].数学教学通讯,2009(3):44-49.

The Disquisition on Coefficient Uneven Recursion System of Equations' Solution

CHEN Chao-bin[1], YANG Qin[1], TANG Mei[2], WU Li-bao[1**]

(1.College of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang, Sichuan 641112; 2.College of Economy and Management, Neijiang Normal University, Neijiang, Sichuan 641112)

Abstract: It uses the knowledge of Linear Algebra and Combinatorics' Master Function to discuss and apply the solution of uneven—linearity recursion system of equations.

Key words: Recursion system of equations; Master function; Cramer's theorem